

Tesi di Dottorato

**Rappresentazioni proiettive:
Applicazioni nella teoria quantistica**

Gianluigi Filippelli

Introduzione

Scopo del lavoro di tesi è trattare in maniera unitaria ed autoconsistente la teoria delle rappresentazioni proiettive, per svilupparne applicazioni alla teoria quantistica.

Per poter affrontare con gli strumenti adeguati lo studio della teoria delle rappresentazioni proiettive, abbiamo innanzitutto approfondito la teoria dei gruppi topologici (Capitolo 1) e dei gruppi e delle algebre di Lie (Capitolo 2). Viene quindi dimostrato il teorema di Wigner sulla rappresentazione delle trasformazioni di simmetria nella teoria quantistica, che permette di rappresentare i gruppi di simmetria di un sistema fisico come rappresentazioni proiettive.

Quindi, seguendo Bargmann [7, 1954], viene sviluppato il formalismo matematico che consente di classificare le rappresentazioni proiettive non equivalenti di un dato gruppo di Lie (Capitolo 4).

Dato un gruppo di Lie G , a partire dalle proprietà caratterizzanti le rappresentazioni proiettive (Definizione 4.2),

$$U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs} = e^{i\xi(r,s)} U_{rs}$$

dove $\omega(r, s) = e^{i\xi(r,s)}$, si studiano gli esponenti di fase $\xi(r, s)$, funzioni delle coordinate di r, s elementi di G , classificandoli in classi di equivalenza. Ogni classe di equivalenza di rappresentazioni proiettive di un dato gruppo di trasformazioni corrisponde a un sistema quantistico che possiede tali simmetrie. La teoria di Bargmann è integrata con i contributi più recenti (Grigore [42, 1996], Simms [19, 1968], Varadarajan [25, 1970], Karpilovsky [34, 36, 1994]). In questo modo la teoria viene applicata ai gruppi abeliani (Sezione 5.1) e pseudo-ortogonali (Sezione 5.2), i cui risultati vengono sfruttati nello studio di gruppi di rilevanza fisica:

- Gruppo delle rotazioni (Sezione 5.3);
- Gruppo di Galileo (Sezione 5.4);
- Gruppo di Poincaré (Sezione 5.5).

In particolare, nel caso dei primi due gruppi viene fornita la procedura per determinare le così dette regole di superselezione di Bargmann:

1. Fissare la rappresentazione proiettiva del gruppo di Galileo corrisponde a fissare la massa della particella galileiana; infatti le classi degli esponenti di fase non equivalenti sono classificate come gli insiemi di funzioni che risultano multipli della funzione

$$\xi_0(r, s) = \frac{1}{2} (\langle u_r | W_r v_s \rangle - \langle v_r | W_r u_s \rangle + \eta_s \langle v_r | W_r v_s \rangle)$$

con fattore moltiplicativo dato proprio dalla massa della particella galileiana.

2. Scegliere una rappresentazione proiettiva per il piccolo gruppo (rotazioni) equivale a fissare lo spin.

Quest'ultima regola di superselezione è frutto di un'altro dei più importanti risultati di Bargmann, secondo cui per ottenere una rappresentazione proiettiva di un gruppo di Lie, basta determinare la corrispondente rappresentazione del suo gruppo coprente (Teorema 4.10).

Nel caso del gruppo di Galileo, si sviluppa una procedura per determinare il commutatore $[P, Q]$ a partire dal commutatore $[d_i, b_j]$, nullo, dove d_i e b_j sono elementi dell'algebra di Lie del gruppo di Galileo; più precisamente d_i è il generatore infinitesimo delle traslazioni delle velocità e b_j il generatore infinitesimo delle traslazioni spaziali. Si estendono, poi, la classificazione e la determinazione delle rappresentazioni proiettive in $(3 + 1)$ dimensioni, al caso di $(2 + 1)$ dimensioni, fornendo in questo caso una procedura per determinare gli esponenti di fase e le rappresentazioni del gruppo corrispondenti [37, 38, 42].

Nel caso del gruppo di Galileo in $(1 + 1)$ dimensioni Doebner e Mann ([40, 1995]) includono un parametro η_r legato alle traslazioni temporali nel gruppo di simmetria, che diventa pertanto a tre parametri:

$$r = (u_r, v_r, \eta_r)$$

Si ricavano l'esponente di fase delle rappresentazioni proiettive e i generatori infinitesimi dipendenti dal tempo. Un loro risultato significativo è che l'operatore hamiltoniano contiene un potenziale non banale anche per la particella libera.

Nella Sezione 5.6 proponiamo un'estensione di tale approccio alle dimensioni superiori, trovando anche una rappresentazione del gruppo di Galileo dipendente dal tempo, che risulta essere proiettiva, con fattore di fase dipendente

anch'esso dal tempo. In questo caso, non abbiamo trovato potenziali non banali nell'hamiltoniano.

Per quel che riguarda le applicazioni al gruppo di Poincaré, se ne dà una definizione, descrivendone le sue proprietà; quindi si descrive un metodo per ottenere l'esponente di fase del gruppo di Galileo in (3+1) dimensioni a partire dall'esponente di fase del gruppo di Poincaré, che è equivalente ad un esponente banale (Brihaye, Giller, Gonera, Kosiński [39, 1995]).

Infine (Capitolo 6) viene discussa la generalizzazione della teoria di Bargmann al caso in cui gli esponenti di fase dipendano anche dal punto del quadrispazio, proposta da Wawrzycki nel 2004 [49]. Tale generalizzazione consentirebbe di risolvere, secondo Wawrzycki, il problema della localizzabilità del fotone. Rispetto a questa proposta, troviamo che affinché la soluzione di Wawrzycki valga, occorre che le funzioni che definiscono l'esponente di fase della rappresentazione posseggano proprietà non accertate allo stato attuale delle conoscenze. Si delineano, quindi, le conseguenze in relazione alle possibili proprietà possedute da queste funzioni: in un caso la proposta di Wawrzycki non condurrebbe a una soluzione. Si indica una via per accertare le proprietà di tali funzioni.

Indice

Introduzione	i
1 Gruppi topologici	1
1.1 Definizioni preliminari	1
1.2 Intorni dell'identità	3
1.3 Sottogruppo, sottogruppo normale e gruppo fattore	4
1.4 Isomorfismo ed omomorfismo	7
1.5 Gruppi connessi e totalmente disconnessi	8
1.6 Proprietà locali	9
1.7 Funzioni continue	11
1.7.1 Sequenze di funzioni	12
1.8 Invariante d'integrazione	13
2 Gruppi di Lie	23
2.1 Definizioni	23
2.1.1 Gruppi continui finiti ed infiniti	28
2.1.2 Prodotto semidiretto	29
2.2 Sottogruppi ad un parametro	31
2.3 Esempi di gruppi di Lie	37
2.4 Gruppi coprenti	45
2.5 Trasformazioni infinitesime	46
2.6 L'algebra di Lie	52
2.6.1 Gruppi lineari	56
2.6.2 Omomorfismi locali	56
2.6.3 Omomorfismi analitici	57
3 Il teorema di Wigner	59
3.1 I raggi di vettori	60
3.2 Trasformazioni di simmetria	62
3.3 Enunciato	64
3.4 Dimostrazione	65

3.4.1	Ortonormalità	65
3.4.2	Proprietà di T	65
3.4.3	Costruzione parziale di U	66
3.4.4	Analisi di V	67
3.4.5	Conclusione nella costruzione di U	70
3.4.6	Unicità di U	71
4	Rappresentazioni proiettive	73
4.1	Osservazioni preliminari	74
4.1.1	Traslazioni temporali e regole di commutazione di Weyl	75
4.1.2	Il gruppo di Galileo	77
4.2	Teoria delle rappresentazioni proiettive	80
4.2.1	Fattori ed esponenti definiti su tutto il gruppo	83
4.2.2	Esponenti locali dei gruppi di Lie	89
4.2.3	Estensione degli esponenti locali di un gruppo di Lie .	103
4.2.4	Derivazione delle rappresentazioni proiettive di un dato gruppo G	106
4.2.5	Il carattere delle rappresentazioni proiettive	111
4.3	Conclusioni	113
5	Implicazioni fisiche	115
5.1	Gruppi abeliani	116
5.1.1	Gruppo abeliano a due parametri	117
5.2	Gruppi pseudo-ortogonali	118
5.2.1	L'algebra di Lie di G_p^m, I_p^m	119
5.2.2	Determinazione degli esponenti infinitesimi	121
5.2.3	Gruppi coprenti e rappresentazioni proiettive di G_p^m, I_p^m	123
5.3	Gruppo delle rotazioni	123
5.3.1	Determinazione del fattore di fase	124
5.3.2	Continuità della rappresentazione	125
5.3.3	La rappresentazione proiettiva di $SO(3)$ in $SU(2)$. . .	127
5.4	Gruppo di Galileo	128
5.4.1	L'algebra di Lie	129
5.4.2	Gli esponenti della rappresentazione proiettiva	130
5.4.3	Il gruppo di Galileo in meccanica quantistica	132
5.4.4	Determinazione dei generatori del gruppo	134
5.4.5	Il gruppo di Galileo in 2 dimensioni	136
5.4.6	Il gruppo di Galileo in 1 dimensione	142
5.5	Gruppo di Poincaré	144
5.5.1	Trasformazioni di Lorentz	144
5.5.2	Il gruppo di Poincaré	148

5.5.3	Origine del fattore di fase del gruppo di Galileo	150
5.6	Estensione dell'approccio di Doebner e Mann a dimensioni superiori	152
5.6.1	Interpretazione fisica degli esponenti di fase	154
6	Una generalizzazione della teoria di Bargmann	155
6.1	Osservazioni preliminari	155
6.2	Esponenti locali ed esponenti infinitesimi	161
6.3	Un problema aperto	167
A	Appendici	171
A.1	Nozioni generali sulla teoria dei gruppi	171
A.1.1	Isomorfismo ed omomorfismo	175
A.1.2	Centro di un gruppo	178
A.1.3	Prodotto diretto tra gruppi	179
A.2	Spazio topologico	182
A.2.1	Gli intorni ed il concetto di chiusura	183
A.2.2	Omeomorfismo ed applicazioni continue	186
A.2.3	Definizioni di sottospazio, compattezza e connessione	188
A.2.4	Prodotto tra spazi topologici	193
A.3	Gruppi di Lie semi-semplici e gruppi di Lie compatti	195
A.3.1	Gli esponenti locali di un gruppo di Lie semi-semplice	195
A.3.2	Rappresentazioni proiettive dei gruppi abeliani compatti connessi	196
A.3.3	Rappresentazioni proiettive dei gruppi di Lie compatti connessi	197
A.4	Fibrato di Hilbert e <i>cross-section</i>	200
A.4.1	Interpretazione fisica della <i>cross-section</i>	201
	Bibliografia	203

Capitolo 1

Gruppi topologici

Nel seguente capitolo si darà innanzitutto una definizione di gruppo topologico, quindi si studieranno importanti concetti come gli intorno dell'identità, i sottogruppi (sottogruppi, sottogruppi normali e sottogruppi fattori), isomorfismi ed omomorfismi, le proprietà di connessione e di disconnessione totale. Si studieranno poi alcune proprietà locali, ed infine verranno introdotte le funzioni continue e gli invarianti d'integrazione. Nel corso del capitolo si daranno per scontate le conoscenze sugli spazi topologici, la cui trattazione è, comunque, lasciata all'Appendice A.2. Per le dimostrazioni, laddove assenti, fare riferimento alla letteratura [16].

1.1 Definizioni preliminari

La nozione di *gruppo topologico* è ottenuta unendo i concetti di gruppo e di spazio topologico: si assume semplicemente che in un unico insieme G siano definite un'operazione di moltiplicazione gruppale per cui G è un gruppo (Definizione A.1), ed un'operazione di chiusura topologica per cui G è uno spazio topologico (Definizione A.18). Queste operazioni sono indipendenti, ma connesse da una condizione di continuità: le operazioni gruppali di G devono essere continue nello spazio topologico (vedi Appendice A.2).

Un gruppo topologico è, pertanto, definito dai seguenti assiomi:

Definizione 1.1.

Un insieme G è detto *gruppo topologico* se:

1. G è un gruppo;
2. G è uno spazio topologico;
3. le operazioni gruppali in G sono continue nello spazio topologico G .

L'ultima richiesta può anche essere formulata come segue:

- Se a, b sono due elementi di G allora per ogni intorno \mathcal{P} di ab^{-1} esistono gli intorni \mathcal{N} di a e \mathcal{M} di b tali che $\mathcal{N}\mathcal{M}^{-1} \subset \mathcal{P}$.

Si esaminano, ora, alcune proprietà elementari dei gruppi topologici:

1. Sia a_1, \dots, a_n un sistema finito di elementi di un gruppo topologico e sia $a_1^{r_1} \dots a_n^{r_n} = c$ il prodotto di loro potenze, positive o negative. Allora per ogni intorno \mathcal{P} di c esistono gli intorni $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n$ degli elementi a_1, \dots, a_n rispettivamente e tali che $\mathcal{N}_1^{r_1} \dots \mathcal{N}_n^{r_n} \subset \mathcal{P}$.
2. Siano $f(x) = xa$, $f'(x) = ax$, $\varphi(x) = x^{-1}$, con $x, a \in G$ ed a fissato. Allora le tre funzioni f, f', φ sono omeomorfismi dello spazio topologico G su se stesso.
3. Siano F un insieme chiuso, U un insieme aperto, P un insieme arbitrario e a un elemento arbitrario di un gruppo topologico G . Allora Fa, aF, F^{-1} sono insiemi chiusi; $UP, PU; U^{-1}$ sono insiemi aperti.
4. Un gruppo topologico G è omogeneo, cioè per ogni coppia di elementi p, q in G esiste un omeomorfismo di G su se stesso che porta p in q .
5. Dall'omogeneità di un gruppo topologico G segue che è sufficiente verificare le sue proprietà locali in un singolo punto. Per esempio, per mostrare che G è localmente compatto, è sufficiente mostrare che l'identità e ammette un intorno U la cui chiusura \bar{U} è compatta.
6. Lo spazio topologico G di un gruppo topologico G è regolare¹.
7. Se P e Q sono due insiemi compatti in un gruppo topologico G allora anche il loro prodotto PQ è compatto.

Esempi di gruppi topologici

- A. L'insieme dei vettori in uno spazio euclideo di dimensione r è un gruppo additivo. Come insieme viene definito nell'esempio (A.2.2), mentre l'operazione di somma vettoriale è continua in tale topologia. In accordo con la struttura risultante, l'insieme è un gruppo topologico, noto come **gruppo vettoriale di dimensione r** .

¹Per ogni punto a ed ogni insieme chiuso B non contenente a nello spazio R esiste una funzione continua reale definita su R tale che $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in R$, $f(a) = 0$, e $f(x) = 1$ per ogni $x \in B$. Uno spazio R che soddisfa a tale assioma è detto **completamente regolare**.

- B. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Il gruppo lineare, $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ o $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, a seconda che V è complesso o reale, è il gruppo di tutte le applicazioni lineari invertibili di V in se stesso. Se si sceglie una base per V , $\text{GL}(n)$ è rappresentato come il gruppo di tutte le matrici invertibili $n \times n$. $\text{GL}(n)$ è un sottoinsieme aperto di dimensione n^2 . $\text{GL}(n)$ è un gruppo topologico localmente compatto.
- C. Il gruppo $\text{U}(n)$ di tutte le matrici unitarie complesse $n \times n$, ovvero delle matrici che soddisfano alla relazione $UU^* = I$ è un gruppo lineare compatto.
- D. Il gruppo $\text{SU}(n)$, il gruppo costituito da tutti gli elementi di $\text{U}(n)$ di determinante $+1$, è un gruppo lineare compatto.
- E. I gruppi reali corrispondenti ad $\text{U}(n)$ ed $\text{SU}(n)$, $\text{O}(n)$, gruppo ortogonale, ed $\text{SO}(n)$, gruppo speciale ortogonale, sono anch'essi gruppi lineari compatti.
- F. Queste idee vengono generalizzate a dimensioni infinite. Sia E uno spazio di Banach, e sia $\text{L}(E)$ lo spazio di tutte le applicazioni lineari limitate: $E \rightarrow E$. Questo è uno spazio di Banach sotto la norma

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$$

Sia $\text{GL}(E)$ il gruppo di tutti gli elementi di $\text{L}(E)$ che hanno inversa continua. Questo gruppo è un sottoinsieme aperto di $\text{L}(E)$ e **non** è localmente compatto se E ha dimensione infinita.

- G. Se \mathcal{H} è uno spazio di Hilbert, il gruppo unitario $\text{U}(\mathcal{H})$ è il gruppo di tutte le applicazioni lineari unitarie, ovvero quelle per cui $(Ux, Uy) = (x, y)$. $\text{U}(\mathcal{H})$ è un sottogruppo chiuso e limitato di $\text{GL}(\mathcal{H})$. **Non** è localmente compatto, se \mathcal{H} ha dimensione infinita.

1.2 Intorni dell'identità

È chiaro che l'ultima condizione della Definizione 1.1 connette in modo molto forte le operazioni algebriche e topologiche in un gruppo topologico. Una particolare conseguenza di questo fatto è che se G è dato inizialmente come semplice gruppo, allora per definire una topologia in G così da farlo diventare un gruppo topologico non è necessario dare una base per tutto il gruppo G , ma è sufficiente determinare un sistema completo di intorni dell'identità. Questa idea può essere esposta nella maniera più semplice possibile attraverso i **gruppi discreti**.

Definizione 1.2.

Un gruppo topologico G è detto un *gruppo discreto* se non ci sono punti di accumulazione in G , cioè se ogni elemento ammette un intorno costituito da quel solo elemento (vedi esempio A.2.1.2).

G è discreto se e solo se la sua identità è un punto isolato del gruppo.

La seguente proposizione ed il Teorema 1.1 mostrano come la topologia di un gruppo è determinata da un sistema completo di intorni della sua identità e come questo fatto può essere utilizzato per introdurre una topologia in un dato gruppo:

Lemma 1.1.

Sia G un gruppo topologico, sia Σ^* un sistema completo di intorni della sua identità e sia M un insieme ovunque denso in G . Allora la collezione Σ di tutti gli insiemi della forma Ux , dove $U \in \Sigma^*$, $x \in M$, è un sistema completo di intorni dello spazio G . Comunque Σ^* soddisfa alle seguenti cinque condizioni:

1. l'intersezione di tutti gli insiemi di Σ^* è costituita dal solo e ;
2. l'intersezione di due qualsiasi insiemi di Σ^* contiene un terzo insieme che appartiene a Σ^* ;
3. per ogni insieme $U \in \Sigma^*$, esiste un insieme $V \in \Sigma^*$ tale che $VV^{-1} \subset U$;
4. per ogni insieme $U \in \Sigma^*$ ed ogni elemento $a \in U$, esiste un insieme $V \in \Sigma^*$ tale che $Va \subset U$;
5. se $U \in \Sigma^*$ e se a è un elemento arbitrario di G , allora esiste un insieme $V \in \Sigma^*$ tale che $a^{-1}Va \subset U$.

Teorema 1.1.

Sia G un gruppo e sia Σ^* un sistema di sottoinsiemi che soddisfa alle cinque condizioni nel Lemma 1.1. Allora c'è uno ed un solo modo per introdurre una topologia in G in modo tale che G sia un gruppo topologico ed il sistema Σ^* diventi un sistema completo di intorni dell'identità.

1.3 Sottogruppo, sottogruppo normale e gruppo fattore

Come nel caso generale (Appendice A.1), si estendono ora al gruppo topologico i concetti di sottogruppo (Definizione A.4), sottogruppo normale (Definizione A.7) e gruppo fattore (Definizione A.8):

Definizione 1.3.

Sia G un gruppo topologico. Allora un sottoinsieme H è detto *sottogruppo del gruppo topologico G* se:

1. H è un sottogruppo del gruppo algebrico G ;
2. H è un insieme chiuso nello spazio topologico.

Un sottogruppo N del gruppo topologico G è un suo *sottogruppo normale* se N è un sottogruppo normale del gruppo algebrico G . (vedi anche Definizione A.7)

Sia, ora, G un gruppo topologico e sia H un suo sottoinsieme, nonché suo sottogruppo. Allora H è anch'esso un gruppo topologico rispetto alla topologia *ereditata* dallo spazio G . In particolare un sottogruppo di un gruppo topologico è esso stesso un gruppo topologico. Segue poi che anche \overline{H} è sottogruppo del gruppo topologico G . Se poi H è un sottogruppo normale di G , allora \overline{H} è anch'esso normale. Se, infine, H è aperto in G , allora $\overline{H} = H$.

Definizione 1.4.

Sia G un gruppo topologico e sia H un sottogruppo di G . Sia poi G/H la collezione di tutti i laterali destri del sottogruppo H in G (vedi Definizione A.6). Si introduce una topologia in G/H come segue:

Sia Σ una base di insiemi aperti in G e per ogni $U \in \Sigma$ si indica con U^* la collezione di tutti i laterali della forma Hx , con $x \in U$. La collezione Σ^* di tutti gli insiemi della forma U^* , $U \in \Sigma$, soddisfa alla condizione del Teorema A.2 e in accordo con esso si costruisce un sistema completo di intorni per una topologia unica in G/H . Lo spazio topologico G/H così definito sarà detto spazio dei laterali a destra del sottogruppo H nel gruppo topologico G . Analogamente si può definire lo spazio dei laterali a sinistra, che può essere indicato allo stesso modo, G/H .

Nella definizione precedente si utilizza lo stesso simbolo per indicare il laterale topologico a destra e a sinistra di un sottogruppo H in un gruppo topologico G : nel seguito, laddove non esiste alcun pericolo di confusione tra i due tipi di insiemi, ci si riferirà a G/H come allo spazio dei laterali di H in G , gruppo topologico.

Siano G un gruppo topologico ed H un suo sottogruppo e sia G/H lo spazio dei laterali. Ad ogni elemento $x \in G$ si associa l'elemento $X = f(x)$ dello spazio G/H dove $f(x)$ è il laterale che contiene x . L'applicazione f di G su G/H così ottenuta è un'applicazione continua aperta nota come la *proiezione naturale* di G su G/H .

Quando il sottogruppo H è normale, allora si può introdurre la seguente definizione:

Definizione 1.5.

Sia G un gruppo topologico ed N un sottogruppo normale di G . L'insieme dei laterali G/N è un gruppo secondo la Definizione A.8 ed uno spazio topologico secondo la Definizione 1.4. Le operazioni gruppali in G/N sono continue nello spazio topologico G/N , così G/N è anche un gruppo topologico. Tale gruppo è detto *gruppo fattore del gruppo topologico G sul gruppo normale N* .

Ogni gruppo topologico G possiede almeno due sottogruppi normali, il gruppo G stesso ed il gruppo banale $\{e\}$. Un gruppo topologico G è detto **semplice** quando ognuno dei suoi sottogruppi normali coincide con G stesso o è discreto (vedi Definizione 1.2).

Vediamo, ora, alcune proprietà degli spazi laterali:

1. Lo spazio G/H dei laterali di un sottogruppo H in un gruppo topologico G è **omogeneo**, cioè per ogni coppia di elementi A, B nello spazio esiste un omeomorfismo φ dell'intero spazio su se stesso che trasforma A in B . Da ciò segue in particolare che per verificare le proprietà locali dello spazio G/H , come ad esempio la regolarità, la compattezza locale, e così via, è sufficiente stabilire la loro validità in un singolo punto.
2. Lo spazio dei laterali di un sottogruppo di un gruppo topologico è regolare, che può essere generalizzato ad ogni spazio di laterali di un gruppo topologico, in particolare lo spazio topologico stesso, è completamente regolare.
3. Siano G un gruppo topologico ed H un suo sottogruppo. Se G è compatto, allora sia H , sia G/H sono anch'essi compatti. Se G è localmente compatto, allora sia H , sia G/H sono localmente compatti.

Sia G il gruppo topologico di tutte le matrici quadrate complesse non singolari $n \times n$. Si indica con U_k l'insieme di tutte le matrici $x \in G$ con la proprietà che tutti gli elementi di matrice di $x - e$, con e matrice identità, sono inferiori ad $1/k$ in valore assoluto. Con Σ^* si indica la collezione di tutti gli insiemi U_k , $k = 1, 2, \dots$. Il gruppo topologico G così ottenuto è localmente compatto e separabile.

L'insieme G' di tutte le matrici reali in G è un sottogruppo di G . Allo stesso modo l'insieme G'' di tutte le matrici reali con determinante positivo è un sottogruppo di G' . L'insieme H' delle matrici ortogonali in G' è un sottogruppo di G' , mentre l'insieme H'' delle matrici ortogonali in G'' è un sottogruppo di G'' . I gruppi G' e G'' sono localmente compatti, mentre H' ed H'' sono compatti. Tutti questi gruppi ammettono basi contabili.

1.4 Isomorfismo ed omomorfismo

Due gruppi topologici sono indistinguibili se posseggono una struttura topologico-algebrica identica. Questa idea può essere formulata in modo più preciso attraverso la seguente definizione:

Definizione 1.6.

Un'applicazione f di un gruppo topologico G su un gruppo topologico G' è detto *isomorfismo* se:

1. f è un isomorfismo del gruppo algebrico G sul gruppo algebrico G' ;
2. f è un omeomorfismo dello spazio topologico G sullo spazio topologico G' .

Se $G = G'$ l'isomorfismo è detto *automorfismo*. Due gruppi topologici sono isomorfi se esiste un isomorfismo di uno sull'altro.

In base a questa definizione, può sempre accadere che due gruppi siano isomorfi come gruppi algebrici, ma non come gruppi topologici.

Definizione 1.7.

Un'applicazione g di un gruppo topologico G in un gruppo topologico G^* è un *omomorfismo* se:

1. g è un omomorfismo del gruppo algebrico G nel gruppo algebrico G^* ;
2. g è un'applicazione continua dello spazio topologico G sullo spazio topologico G^* .

Un omomorfismo g di un gruppo topologico G in un gruppo topologico G^* è detto *aperto* se è un'applicazione aperta (Definizione A.24) dello spazio topologico G nello spazio topologico G^* .

Siano G e G^* due gruppi topologici e sia g un omomorfismo del gruppo algebrico G nel gruppo algebrico G^* . Allora affinché g sia un'applicazione continua o aperta è sufficiente che lo sia nell'elemento identità e di G , cioè è sufficiente che sia soddisfatta una o l'altra delle seguenti condizioni:

- a. per ogni intorno \mathcal{N}^* di e^* in G^* esiste un intorno \mathcal{N} di e tale che $g(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}^*$;
- b. per ogni intorno \mathcal{M} di e in G esiste un intorno \mathcal{M}^* di e^* tale che $g(\mathcal{M}) \supset \mathcal{M}^*$.

Sia G un gruppo topologico, N un suo sottogruppo normale e G/N il gruppo fattore. Allora la proiezione naturale g (cioé l'applicazione che associa ad ogni elemento $x \in G$ quel laterale $X \in G/N$ che contiene x) è un omomorfismo aperto di G su G/N .

Teorema 1.2.

Siano G e G^* due gruppi topologici e sia g un omomorfismo aperto di G su G^* con nucleo N . Allora N è un sottogruppo normale di G e l'isomorfismo del gruppo algebrico G/N sul gruppo algebrico G^* definito nel *Teorema A.1* è un isomorfismo del gruppo topologico G/N sul gruppo topologico G^* .

1.5 Gruppi connessi e totalmente disconnessi

Si studieranno, ora, alcune proprietà dei gruppi topologici legate alla loro specifica struttura topologica e che non hanno alcun analogo nella teoria dei gruppi astratti.

Sia G un gruppo topologico arbitrario e sia N il componente dell'identità e nello spazio topologico G (vedi il punto 2 a pag.191). Allora N è un sottogruppo normale di G .

Se il gruppo topologico è connesso, cioè se lo spazio G è connesso, allora il componente dell'identità in G coincide con G stesso. Se, d'altra parte, il componente dell'identità in G è costituito dalla sola identità allora per l'omogeneità di G tutti i componenti sono costituiti da punti singoli e G è *totalmente disconnesso*.

Sia G un gruppo topologico arbitrario e sia N il componente dell'identità in G . Allora il gruppo fattore $G/N = G^*$ è totalmente disconnesso.

Seguono, ora, una serie di teoremi:

Teorema 1.3.

Un gruppo topologico connesso G è generato da un intorno arbitrario \mathcal{N} dell'identità. Ciò vuol dire che G coincide con l'unione di tutti gli insiemi della forma \mathcal{N}^n , con $n = 1, 2, \dots$, o che ogni elemento di G può essere scritto come prodotto finito degli elementi appartenenti ad \mathcal{N} .

Teorema 1.4.

Ogni sottogruppo normale discreto N di un gruppo topologico connesso G è un sottogruppo centrale normale.

Il Teorema 1.4 è importante in quanto facilita la ricerca dei sottogruppi normali discreti di un gruppo connesso.

Teorema 1.5.

Sia G un gruppo topologico localmente compatto, totalmente disconnesso. Allora per ogni intorno \mathcal{N} dell'identità di G esiste un sottogruppo compatto aperto H tale che $H \subset \mathcal{N}$. Poiché H è uno spazio aperto, G/H è discreto.

Teorema 1.6.

Sia G un gruppo topologico compatto totalmente disconnesso e sia \mathcal{M} un intorno arbitrario dell'identità. Allora esiste un sottogruppo normale aperto N contenuto in \mathcal{M} . Poiché il gruppo fattore G/N è discreto e compatto, deve essere anche finito.

Il Teorema 1.5 ammette il seguente inverso:

- Se ogni intorno \mathcal{N} dell'identità e di un gruppo topologico G contiene un sottogruppo aperto H , allora G è totalmente disconnesso.

Esempio 1.5.1. *Esempio di gruppo totalmente disconnesso*

Sia G il gruppo topologico additivo dei numeri reali e sia H l'insieme di tutti i numeri razionali. Allora H è sottogruppo del gruppo algebrico G , così che H è esso stesso un gruppo topologico (vedi pag.5). È semplice vedere che il componente di 0 in H contiene solo 0, così che H è un gruppo totalmente disconnesso. Si noti anche che per ogni intorno \mathcal{N} di 0 nel gruppo H , l'intero gruppo H è generato da quell'intorno: quindi un gruppo non deve essere necessariamente connesso per avere la proprietà stabilita nel Teorema 1.3. Comunque è chiaro che H non possiede alcun sottogruppo aperto in \mathcal{N} così che il Teorema 1.5 in generale non è vero per gruppi totalmente disconnessi. Il gruppo H è localmente non compatto.

1.6 Proprietà locali

Proprietà specifiche dei gruppi topologici sono le così dette **proprietà locali**, ovvero quelle proprietà che si possono definire in base al comportamento del gruppo in vicinanza all'identità. Si vedranno, di seguito, alcune di queste proprietà:

Sia G un gruppo topologico con identità e e sia G_0 il componente connesso che contiene e . Sia V un sottoinsieme aperto di G_0 che contiene e . Allora valgono le seguenti proprietà:

- G_0 è un sottogruppo di G ;
- ogni sottogruppo aperto di un gruppo topologico è chiuso;

- c. V genera G_0 come gruppo;
- d. Un omomorfismo $f : G \rightarrow H$ di gruppi topologici è continuo se è continua la restrizione di f a V .

Definizione 1.8.

Siano G, G' gruppi topologici. Un *omomorfismo locale* di G in G' è un'applicazione continua $f : V \rightarrow G'$, dove V è un sottoinsieme aperto di G contenente e , tale che:

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad x, y, xy \in V \quad (1.1)$$

L'omomorfismo locale può diventare un omomorfismo globale in alcune particolari condizioni:

Teorema 1.7.

Sia G uno spazio topologico connesso e semplicemente connesso e sia V un sottoinsieme aperto connesso di G contenente l'identità $e \in G$. Allora ogni omomorfismo locale $F : V \rightarrow H$ in un gruppo topologico H si estende ad un unico omomorfismo $G \rightarrow H$.

Si noti che l'unicità segue dal punto c e la continuità dal punto d.

Definizione 1.9.

Due gruppi topologici G, G' sono detti *localmente isomorfi* se esistono due intorni $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ delle rispettive identità e, e' ed un omeomorfismo f di \mathcal{N} su \mathcal{N}' tale che:

1. se x, y e xy appartengono ad \mathcal{N} , allora $f(xy) = f(x)f(y)$.
2. se x', y' e $x'y'$ appartengono ad \mathcal{N}' , allora $f^{-1}(x'y') = f^{-1}(x')f^{-1}(y')$.

Si noti che, se la condizione formulata nella definizione precedente è soddisfatta, allora sono vere anche le seguenti condizioni:

3. $f(e) = e'$;
4. se x, x^{-1} appartengono ad \mathcal{N} , allora $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Inoltre, dalla condizione 1, segue che:

5. se x', y' e $x'y'$ appartengono ad \mathcal{N}' , allora $f^{-1}(x'y') = f^{-1}(x')f^{-1}(y')$.

Sia G un gruppo topologico e sia N un sottogruppo normale discreto di G . Allora G e $G/N = G'$ sono localmente isomorfi.

Segue il seguente teorema:

Teorema 1.8.

Siano G, G' due gruppi topologici connessi localmente isomorfi. Allora esiste un gruppo H tale che G è isomorfo al gruppo fattore H/N e G' è isomorfo al gruppo fattore H/N' , dove N, N' sono sottogruppi normali discreti in H .

Per proprietà locale di un gruppo topologico si intende una proprietà che si ottiene simultaneamente in tutti i gruppi mutualmente localmente isomorfi. Si dovrebbe notare che il comportamento locale di un gruppo ha una forte influenza in porzioni più ampie, così lo studio delle proprietà locali di un gruppo assume una grande importanza.

1.7 Funzioni continue

Poiché un gruppo topologico è, in particolare, uno spazio topologico, ha senso parlare di funzioni continue definite su G . Il fatto che G è anche un gruppo, rende possibile formulare una definizione di continuità lievemente differente e di introdurre il concetto di *continuità uniforme*.

Sia G un gruppo topologico e sia M un arbitrario sottoinsieme di G . Una funzione numerica f definita sul sottospazio M è continua nel punto $a \in M$ se e solo se, per ogni numero positivo arbitrario ε , esiste un intorno \mathcal{N} dell'identità tale che per $x \in M, xa^{-1} \in \mathcal{N}$ si ha $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definizione 1.10.

Sia M un sottospazio arbitrario di un gruppo topologico G e sia f una funzione numerica definita su M .

- Allora f è detta *uniformemente continua* se per ogni numero positivo arbitrario ε esiste un intorno \mathcal{N} dell'identità $e \in G$ tale che per $xy^{-1} \in \mathcal{N}, x \in M, y \in M$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- Si può anche dire che una funzione f è uniformemente continua se per un ε positivo arbitrario esiste un intorno \mathcal{N}' di e tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, con $x^{-1}y \in \mathcal{N}'$.

Queste due definizioni per la continuità uniforme non sono, in generale, equivalenti, anche se nei casi trattati in questa sede in effetti lo saranno. Inoltre si noti che una funzione che è uniformemente continua in entrambi i sensi, è automaticamente continua.

In alcuni casi, poi, la semplice continuità di una funzione implica la sua continuità uniforme:

Lemma 1.2.

Sia G un gruppo topologico e sia M un sottoinsieme compatto di G . Allora

una funzione continua f definita su M è automaticamente uniformemente continua in entrambi i sensi della Definizione 1.10.

Infatti, sia ε un numero positivo. Poiché f è continua, esiste per ogni punto $a \in M$ un intorno \mathcal{N}_a di e identità tale che $xa^{-1} \in \mathcal{N}_a$ ed $x \in M$, allora $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sia \mathcal{M}_a un intorno di e tale che $\mathcal{M}_a^2 \subset \mathcal{N}_a$. Chiaramente la collezione degli insiemi aperti $\mathcal{M}_a a$, $a \in M$, copre M e poiché M è compatto è possibile selezionare una copertura finita. Così esiste il sistema finito a_1, \dots, a_n dei punti di M tale che gli insiemi aperti $\mathcal{M}_{a_i} a_i$, $i = 1, \dots, n$, copre M . Sia \mathcal{N} l'intersezione degli intorni \mathcal{M}_{a_i} . Poiché gli insiemi $\mathcal{M}_{a_i} a_i$ copre M , per $xy^{-1} \in \mathcal{N}$, $x \in M$, $y \in M$, esiste un numero k tale che $ya_k^{-1} \in \mathcal{M}_{a_k}$ e di conseguenza $|f(y) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comunque si ha

$$xa_k^{-1} = xy^{-1}ya_k^{-1} \in \mathcal{N}\mathcal{M}_{a_k} \subset \mathcal{M}_{a_k}^2 \subset \mathcal{N}_{a_k}$$

così che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Insieme con il concetto di continuità uniforme di una singola funzione, è importante anche il concetto di equicontinuità uniforme di una famiglia di funzioni.

Definizione 1.11.

Sia M un arbitrario sottospazio di un gruppo topologico G . Un insieme Δ di funzioni definite su M è detto *uniformemente equicontinuo* se per ogni ε positivo arbitrario esiste un intorno \mathcal{N} dell'identità in G tale che per $xy^{-1} \in \mathcal{N}$, $x \in M$, $y \in M$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni funzione $f \in \Delta$. L'insieme Δ è anche detto *uniformemente limitato* se esiste un numero m tale che per $x \in M$, $f \in \Delta$, $|f(x)| < m$.

1.7.1 Sequenze di funzioni

Si possono, ora, introdurre le sequenze di funzioni uniformemente convergenti:

1. Una sequenza di funzioni f_n , $n = 1, 2, \dots$, definita su un insieme M è detta *uniformemente convergente* alla funzione f , anch'essa definita su M , se per ogni numero positivo ε esiste un intero m tale che per $n > m$ si ha $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, per $x \in M$ arbitrario.
2. La sequenza di funzioni f_n , definita su un insieme M , è uniformemente convergente quando e solo quando per un numero positivo arbitrario ε esiste un intero positivo m tale che per $p > m$, $q > m$, si ha $|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$, per $x \in M$ arbitrario. (*Criterio della convergenza uniforme di Cauchy*)

3. Se una sequenza di funzioni continue converge uniformemente allora la funzione limite è essa stessa continua.
4. Una sequenza uniformemente convergente f_n di funzioni continue definite su un sottospazio compatto arbitrario M di un gruppo topologico G è automaticamente equicontinua ed uniformemente limitata.

Teorema 1.9.

Siano G un gruppo topologico, M un sottoinsieme compatto di G , e Δ un insieme uniformemente limitato ed uniformemente equicontinuo di funzioni reali definite su M . Allora ogni sequenza di funzioni appartenenti a Δ contiene una sottosequenza uniformemente convergente.

Sia M uno spazio topologico compatto e sia f una funzione continua definita su M . Si indica con $K(f)$ il minimo di f , con $L(f)$ il massimo, $S(f) = L(f) - K(f)$ l'oscillazione di f . Se una sequenza di funzioni f_n converge uniformemente ad f , allora le seguenti espressioni sono semplicemente verificate:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(f_n) = K(f), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n) = L(f), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(f_n) = S(f)$$

1.8 Invariante d'integrazione

Definizione 1.12.

Se G è un gruppo topologico compatto allora diremo che un *invariante d'integrazione* è definito su G se ad ogni funzione continua reale f definita su G è associato un numero reale, indicato da $\int f(x) dx$ e detto integrale di f su G , tale che le seguenti condizioni sono soddisfatte:

1. Se α è un numero reale, allora

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$$

2. Se f e g sono due funzioni continue, allora

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

3. Se la funzione f è non-negativa ovunque, allora

$$\int f(x) dx \geq 0$$

4. Se $f(x) = 1$ per ogni x , allora $\int f(x) dx = 1$
5. Se la funzione f è ovunque non-negativa e non identicamente nulla, allora $\int f(x) dx > 0$
6. Se a è un elemento arbitrario di G , allora

$$\int f(xa) dx = \int f(x) dx$$

7. Se a è un elemento arbitrario di G , allora

$$\int f(ax) dx = \int f(x) dx$$

8. $\int f(x^{-1}) dx = \int f(x) dx$

Le prime cinque condizioni della definizione sono naturali; le ultime tre esprimono la speciale proprietà grupale dell'invarianza.

Si osserva che le condizioni 1, 2, 3 consentono l'integrazione delle disuguaglianze e rendono possibile ottenere l'usuale stima riguardo all'integrazione dei valori assoluti: se $f(x) \leq g(x)$, allora

$$\int f(x) dx \leq \int g(x) dx, \quad \left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx$$

Teorema 1.10.

Su un gruppo topologico compatto G è possibile definire un invariante d'integrazione in uno ed un solo modo.

Prima di fornire una dimostrazione del Teorema 1.10, si forniranno alcune importanti osservazioni, alcune delle quali sono, a tutti gli effetti, delle parti della dimostrazione del teorema.

- A. Sia f una funzione continua definita su G e sia $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ una sequenza finita di elementi appartenenti a G , dove la sequenza A può contenere ripetizioni. Si introduce la seguente notazione:

$$M(A, f; x) = \sum_{i=1}^m \frac{f(xa_i)}{m} \tag{1.2}$$

La funzione $M(A, f)$ di argomento $x \in G$ definita dalla (1.2) è continua. Per tale funzione valgono le seguenti proprietà:

$$K(M(A, F)) \geq K(f) \tag{1.3a}$$

$$L(M(A, f)) \geq L(f) \tag{1.3b}$$

$$S(M(A, f)) \geq S(f) \tag{1.3c}$$

dove K, L, S sono le funzioni definite a pag.13. È semplice verificare che se $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ sono due sequenze finite di elementi di G , allora

$$M(A, M(B, f)) = M(AB, f) \quad (1.4)$$

dove AB indica la sequenza costituita dagli elementi $a_i b_j$, con $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

- B. Se f è una funzione continua non-costante definita su G , allora G contiene un sistema finito di elementi A tale che

$$S(M(A, f)) < S(f) \quad (1.5)$$

Si indicano con k ed l rispettivamente il minimo ed il massimo di f . Poiché f è continua e $k < l$, esiste un insieme aperto $U \subset G$ tale che per ogni $x \in U$ la disuguaglianza $f(x) \leq h < l$ è soddisfatta. La collezione di insiemi aperti della forma Ua^{-1} copre G e di conseguenza esiste un sistema finito $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ tale che gli insiemi aperti Ua_i^{-1} , $i = 1, \dots, m$, coprono G .

Si vedrà che la funzione $M(A, f)$ ha un massimo non eccedente

$$\frac{(m-1)l + h}{m} < h$$

Infatti per ogni x si ha $f(xa_i) \leq l$, $i = 1, \dots, m$; ma anche per ogni elemento x esiste sempre un intero j tale che $x \in Ua_j^{-1}$, cioè $xa_j \in U$, così che $f(xa_j) \leq h$. Poiché il minimo di $M(A, f)$ non è più piccolo di k , segue il risultato.

- C. Sia f una funzione continua definita su G . Per ogni numero positivo ε esiste un sistema finito A di elementi appartenenti a G tale che per $x \in G$ arbitrario

$$|M(A, f; x) - p| < \varepsilon \quad (1.6)$$

con p numero reale.

Sia Δ la collezione di tutte le funzioni della forma $M(A, f)$, dove f è una fissata funzione continua definita su G e dove A è un arbitrario sistema finito di elementi appartenenti a G . Dalle (1.3a), (1.3b) segue che la famiglia è uniformemente limitata.

La funzione f , in quanto continua, è automaticamente uniformemente continua (vedi Lemma 1.2); quindi per ogni positivo ε esiste un intorno

\mathcal{N} dell'identità tale che per $xy^{-1} \in \mathcal{N}$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Se però $xy^{-1} \in \mathcal{N}$, allora $(xa_i)(ya_i)^{-1} = xy^{-1} \in \mathcal{N}$ così che $|f(xa_i) - f(ya_i)| < \varepsilon$. Sommando questa disuguaglianza per $i = 1, \dots, m$ e dividendo il risultato per m si ottiene $|M(A, f; x) - M(A, f; y)| < \varepsilon$. Poiché ciò è vero per $xy^{-1} \in \mathcal{N}$ e per un arbitrario A segue che Δ è uniformemente equicontinuo.

Sia, ora, s il limite inferiore dell'insieme di tutti i numeri $S(M(A, f))$. Allora esiste una sequenza

$$f_1, \dots, f_n, \dots \quad (1.7a)$$

delle funzioni appartenenti a Δ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f_n) = s$$

Poiché Δ è uniformemente limitato ed equicontinuo, si può, per il Teorema 1.9, selezionare dalla (1.7a) una sottosequenza uniformemente convergente

$$g_1, \dots, g_n, \dots \quad (1.7b)$$

Se g è il limite di questa sottosequenza, allora $S(g) = s$ (vedi pag.13). Si mostra innanzitutto che g è costante o, il che è lo stesso, che $s = 0$.

Si suppone il contrario. Segue da B che esiste un sistema finito A di elementi che appartengono a G tale che

$$S(M(A, g)) = s' < s \quad (1.7c)$$

Sia $\varepsilon = \frac{s-s'}{3}$. Poiché (1.7b) converge a g uniformemente, esiste un indice k tale che $|g(x) - g_k(x)| < \varepsilon$. Sostituendo ad x , xa_i , $i = 1, \dots, m$, e dividendo il risultato per m si ottiene:

$$|M(A, g; x) - M(A, g_k; x)| < \varepsilon \quad (1.7d)$$

Dalle (1.7c) e (1.7d) segue che

$$S(M(A, g_k)) \leq s' + 2\varepsilon < s$$

In accordo con la (1.4), però, la funzione $M(A, g_k)$ è essa stessa una delle funzioni che appartengono a Δ , ovvero deve avere delle oscillazioni maggiori del limite inferiore s : si giunge quindi ad una contraddizione e si può concludere che g è costante, $g(x) \equiv p$.

A questo punto, poiché la (1.7b) converge a g uniformemente segue che per un positivo arbitrario ε esiste un indice n tale che $|g_n(x) - p| < \varepsilon$, per ogni x . $g_n \in \Delta$, però, da cui segue che esiste un sistema finito A di elementi di G tale che la (1.6) è soddisfatta. Di conseguenza p è una *media a destra* di f .

D. Per analogia con A si introduce una nuova funzione $M'(B, f)$ dell'argomento $x \in G$ come

$$M'(B, f; x) = \sum_{j=1}^n \frac{f(b_j x)}{n} \quad (1.8)$$

dove $B = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Si vede immediatamente che

$$M(A, M'(B, f)) = M'(B, M(A, f)) \quad (1.9)$$

E. Per analogia con C si introduce la nozione di *media a sinistra*. Il numero reale q sarà detto media a sinistra della funzione continua f definita su G se possiede la seguente proprietà: per ogni positivo ε esiste un sistema finito B di elementi di G tale che

$$|M'(B, f; x) - q| < \varepsilon \quad (1.10)$$

Ogni funzione continua definita su G possiede almeno una media a sinistra.

F. Per ogni funzione continua f definita su G esiste una sola media a destra ed una sola media a sinistra, e questi due numeri coincidono. L'unico numero così associato ad f sarà detto la sua *media* ed indicato con $M(f)$. Sia p una media a destra della funzione f e sia q una media a sinistra della stessa funzione. Allora per un'opportuna scelta di A e B le relazioni (1.6), (1.10) sono soddisfatte. Sostituendo $b_j x$ per x nella (1.6), sommando su $j = 1, \dots, n$, e dividendo per n si ottiene

$$|M'(B, M(A, f); x) - p| < \varepsilon$$

Allo stesso modo si sostituisce nella (1.10) $x a_i$ in luogo della x , si somma su $i = 1, \dots, m$, e si divide per m , ottenendo

$$|M(A, M'(B, f); x) - q| < \varepsilon$$

Utilizzando la (1.9) si conclude che $|p - q| < 2\varepsilon$ e poiché quest'ultima disuguaglianza è vera per un positivo arbitrario ε segue che $p = q$.

G. Siano f, g due funzioni continue definite su G . Allora

$$M(f + g) = M(f) + M(g) \quad (1.11)$$

Innanzitutto si mostrerà che

$$M(M(B, f)) = M(f) \quad (1.12a)$$

Sia

$$M(f) = p \quad (1.12b)$$

Allora p è, in particolare, una media a sinistra per f così che per un positivo arbitrario ε esiste un sistema finito C di elementi di G tale che

$$|M'(C, f; x) - p| < \varepsilon$$

Sostituendo xb per x in questa disuguaglianza, sommando su $j = 1, \dots, n$ e dividendo per n si ottiene

$$|M'(C, M(B, f); x) - p| < \varepsilon$$

così p è anche una media a sinistra della funzione $M(B, f)$ e quindi la (1.12a) è verificata.

Sia ora

$$M(g) = q \quad (1.12c)$$

Allora q è, in particolare, una media a destra per g e di conseguenza per un positivo arbitrario ε esiste un sistema finito B di elementi di G tale che

$$|M(B, g; x) - q| < \varepsilon$$

Segue che

$$|M(A', M(B, g); x) - q| < \varepsilon$$

per ogni sistema finito A' di elementi di G . Comunque, in accordo con la (1.4) l'ultima disuguaglianza può essere riformulata come segue:

$$|M(A'B, g; x) - q| < \varepsilon \quad (1.12d)$$

In accordo con le (1.12a), (1.12b), p è una media a destra per $M(B, f)$, cioè esiste un sistema finito A di elementi di G tale che

$$|M(A, M(B, f); x) - p| < \varepsilon$$

che può essere riscritto utilizzando la (1.4) nella forma

$$|M(AB, f; x) - p| < \varepsilon \quad (1.12e)$$

In conclusione, scegliendo $A' = A$ nella (1.12d) si ottiene

$$|M(AB, f + g; x) - (p + q)| < \varepsilon$$

Così $p + q$ è media a destra della somma di funzioni $f + g$ e la (1.11) è verificata.

H. Sia f una funzione continua definita su G e sia a un elemento arbitrario di G . Si definisce $f'(x) = f(xa)$, $f''(x) = f(ax)$. Allora

$$M(f') = M(f) \quad (1.13a)$$

$$M(f'') = M(f) \quad (1.13b)$$

Si osserva innanzitutto che

$$M(A, f') = M(Aa, f)$$

Da ciò segue immediatamente che le medie a destra delle funzioni f' , f coincidono, da cui segue la (1.13a). In modo analogo, utilizzando le medie a sinistra in luogo di quelle a destra, si ottiene la (1.13b).

I. Sia f una funzione continua non-negativa definita su G , non identicamente nulla. Allora

$$M(f) > 0 \quad (1.14)$$

Infatti, esiste un insieme aperto $U \subset G$ tale che per $x \in U$ si ha $f(x) > h > 0$. Gli insiemi aperti Ua^{-1} coprono G e poiché G è compatto esiste un sistema finito $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ tale che gli insiemi aperti Ua_i^{-1} , $i = 1, \dots, m$, coprono G . Per ogni x , $f(x) \geq 0$; comunque per ogni x esiste un indice k tale che $x \in Ua_k^{-1}$, cioè $xa_k \in U$, così che $f(xa_k) < h$. Di conseguenza $M(A, f; x) \geq \frac{h}{m}$, da cui segue che anche $M(f) = M(M(A, f)) \geq \frac{h}{m}$.

Dimostrazione Teorema 1.10. Si definisce l'integrale $\int f(x) dx$ di una funzione continua arbitraria f definita su G come

$$\int f(x) dx = M(f) \quad (1.15)$$

Le condizioni 1, 3 e 4 della Definizione 1.12 sono chiaramente soddisfatte, mentre le condizioni 2, 5, 6 e 7 sono state dimostrate nelle precedenti proposizioni G, I, H.

Si mostrerà ora che un integrale arbitrario $\int^* f(x) dx$ che soddisfa alle condizioni 1-4 e 6 della Definizione 1.12 deve soddisfare anche a

$$\int^* f(x) dx = M(f) \quad (1.16)$$

Sia p una media a destra della funzione f tale che, per un A opportunamente scelto

$$|M(A, f; x) - p| < \varepsilon$$

Come è stato notato, sono necessarie solo le condizioni 1-4 della Definizione 1.12 per integrare questa disuguaglianza:

$$\left| \int^* M(A, f; x) dx - p \right| \leq \varepsilon$$

quindi, utilizzando la proprietà 6, si ottiene

$$\left| \int^* f(x) dx - p \right| \leq \varepsilon \quad (1.17)$$

Poiché la (1.17) è verificata per un positivo arbitrario ε , segue che anche la (1.16) è verificata. Così l'unicità dell'integrale, che soddisfa alle condizioni 1-4 e 6 della Definizione 1.12, è dimostrata.

Resta da far vedere che è soddisfatta anche la condizione 8. A questo scopo si definisce su G un nuovo integrale $\int^* f(x) dx$:

$$\int^* f(x) dx = \int f(x^{-1}) dx \quad (1.18)$$

Non è difficile verificare che un integrale così definito soddisfa alle condizioni 1-4 e 6 della Definizione 1.12. Ad esempio la verifica della condizione 6 procede come segue:

$$\begin{aligned} \int^* f(xa) dx &= \int f(x^{-1}a) dx = \int f((a^{-1}x)^{-1}) dx = \int f(x^{-1}) dx = \\ &= \int^* f(x) dx \end{aligned}$$

Per l'unicità già stabilita segue che $\int f(x^{-1}) dx = \int f(x) dx$, che completa la dimostrazione del Teorema 1.10.

È necessario ora integrare non solo funzioni a valori reali, ma anche quelle a valori complessi, cioè funzioni della forma $h = f + ig$, dove f, g sono funzioni reali. In questo modo una funzione h è continua se lo sono f e g ed il suo integrale è definito dall'uguaglianza:

$$\int h(x) dx = \int f(x) dx + i \int g(x) dx$$

È semplice verificare che l'integrale di una funzione complessa continua soddisfa alla Definizione 1.12, dove α può in questo caso assumere valori complessi. Sarà necessario anche considerare non solo integrali singoli, ma anche doppi: Siano G ed H gruppi topologici compatti e sia f una funzione continua di due variabili, $x \in G, y \in H$. Per un y fissato la funzione f è continua in x così che $\int f(x, y) dx = g(y)$. Allora la funzione g è continua in H .

Teorema 1.11.

Siano G ed H gruppi topologici compatti e sia P il loro prodotto diretto. Sia f una funzione continua delle due variabili $x \in G, y \in H, f(x, y) = f(z), z = (x, y) \in P$. Allora

$$\int \left(\int f(x, y) dx \right) dy = \int \left(\int f(x, y) dy \right) dx = \int f(x, y) dx dy$$

Esempio

Sia G^* il gruppo topologico additivo dei numeri reali e sia φ una funzione periodica continua definita su G^* e con periodo 1: $\varphi(x^* + 1) = \varphi(x^*)$. Sia N il sottogruppo di G^* costituito dagli interi. La periodicità di φ implica che è costante sui vari laterali del sottogruppo N e conseguentemente definisce una funzione continua f sul gruppo fattore $G^*/N = G$. D'altra parte, ogni funzione continua f su G può essere ottenuta in questo modo. Poiché G è compatto si definisce un integrale $\int f(x) dx$ che soddisfa alle condizioni della Definizione (1.12). Non è difficile vedere che:

$$\int f(x) dx = \int_0^1 \varphi(x^*) dx^*$$

dove il membro a destra è l'usuale integrale di una funzione a variabile reale.

Capitolo 2

Gruppi di Lie

Il concetto di **gruppo di Lie** contiene nella sua definizione la richiesta dell'analiticità, o almeno di differenziabilità di certe funzioni, ovvero quelle funzioni che determinano l'operazione della moltiplicazione gruppale (vedi Definizione 2.1). Come conseguenza di ciò è possibile, nello studio dei gruppi di Lie, utilizzare in maniera estensiva l'apparato dell'analisi, in particolare della teoria delle equazioni differenziali, e ciò rende possibile un'analisi strutturale approfondita.

Pertanto, nel corso di questo capitolo, si affronterà lo studio di tali gruppi, dando innanzitutto una definizione di gruppo di Lie [30, 35]. Vengono quindi caratterizzati i gruppi di Lie attraverso le coordinate delle trasformazioni, distinguendo tra le relazioni definite sul gruppo e quelle che agiscono su uno spazio X di punti x^1, \dots, x^n [16, 14]. Dopo aver definito i gruppi continui finiti ed infiniti ed il prodotto semidiretto [14, 25], si definiscono i sottogruppi ad un parametro e se ne descrivono le proprietà [16, 35]. Quindi si presentano alcuni esempi di gruppi di Lie [16, 21]. Infine si definiranno i gruppi coprenti, le trasformazioni infinitesime e si darà una breve trattazione sull'algebra di Lie [14, 16, 21, 30]. Per le dimostrazioni, laddove non presenti, fare riferimento a [16].

2.1 Definizioni

Sia G un gruppo topologico. Si potrà definire un sistema di coordinate in G se esiste un omeomorfismo φ di un qualche intorno \mathcal{N} dell'identità di G su un insieme aperto V di uno spazio euclideo S sotto la cui azione l'identità è trasportata nell'origine di S . In questo modo ad ogni $a \in \mathcal{N}$ corrisponde una n -pla di numeri reali

$$a^1, \dots, a^n \tag{2.1}$$

le coordinate del punto $\varphi(a) \in S$. Tali numeri saranno anche detti le *coordinate del punto* $a \in \mathcal{N}$. In particolare, le coordinate dell'identità del gruppo G sono tutte nulle. Comunque, ad ogni n -pla (2.1), in cui i numeri sono sufficientemente piccoli in valore assoluto, corrisponde un definito punto $a \in \mathcal{N}$ che ha tale n -pla come sue proprie coordinate. Il numero n è la dimensione del gruppo locale G .

Sia \mathcal{M} un intorno dell'identità $e \in G$ sufficientemente piccolo così che per ogni coppia a, b di elementi di \mathcal{M} il prodotto ab è definito ed appartiene ad \mathcal{N} . Allora

$$ab = c = f(a, b) \quad (2.2)$$

Poiché a, b, c appartengono tutti ad \mathcal{N} , allora sono dotati di coordinate, e quindi in termini delle rispettive coordinate la (2.2) può essere riscritta come

$$c^i = f^i(a, b) = f^i(a^1, \dots, a^n; b^1, \dots, b^n) \quad (2.3)$$

dove le funzioni f^i sono singolarmente rispetto a tutti gli argomenti. Comunque, poiché $ae = a$, $eb = b$, segue che

$$\begin{aligned} f^i(a^1, \dots, a^n; 0, \dots, 0) &= a^i \\ f^i(0, \dots, 0; b^1, \dots, b^n) &= b^i \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le coordinate (2.1) definite nel gruppo locale G sono dette differenziabili se le funzioni (2.3) sono tre volte continuamente differenziabili, e sono dette analitiche se le funzioni sono analitiche. Come immediata conseguenza della (2.4) segue

$$\frac{\partial f^i}{\partial a^j} = \frac{\partial f^i}{\partial b^j} = \delta_j^i \quad \text{per } a = b = e \quad (2.5)$$

Dalla (2.5) segue che in un qualche intorno di e le equazioni (2.3) possono essere risolte per le coordinate a^1, \dots, a^n dell'elemento $a = cb^{-1}$; di conseguenza queste coordinate sono anche funzioni tre volte continuamente differenziabili o analitiche, rispettivamente, delle coordinate di b e c . E la stessa affermazione è vera per $b = a^{-1}c$.

Definizione 2.1.

Un gruppo topologico G su un campo K è detto *gruppo di Lie* se, per ogni $a, b \in G$, le applicazioni

$$\begin{aligned} \phi : G \times G &\rightarrow G, & (a, b) &\rightarrow ab \\ \psi : G &\rightarrow G, & a &\rightarrow a^{-1} \end{aligned}$$

sono analitiche. Ovvero le coordinate del prodotto di due elementi (dell'inverso) devono essere funzioni analitiche delle coordinate dei fattori.

Se la struttura analitica del gruppo di Lie è reale o complessa, allora il gruppo sarà detto *gruppo di Lie complesso* o *reale*. Ogni gruppo di Lie complesso può essere visto come un gruppo di Lie reale di dimensione doppia. Chiaramente ogni gruppo di Lie (reale o complesso) è un gruppo topologico, ma in generale il viceversa non è vero.

Sia G un gruppo di Lie e sia Σ un sistema di coordinate differenziabili di G . Siano a^i le coordinate di un punto arbitrario a nel sistema Σ e sia

$$f^i(a) = f^i(a^1, \dots, a^n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

un sistema di funzioni tre volte continuamente differenziabili tale che:

$$f^i(e) = f^i(0, \dots, 0) = 0 \quad (2.7)$$

Sia

$$p_j^i = \frac{\partial f^i(e)}{\partial a^j} \quad (2.8)$$

Se il determinante della matrice $|p_j^i|$ è non-nullo, allora il sistema di equazioni

$$a^i = \varphi^i(a^1, \dots, a^n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

può essere visto come se introducesse in G un nuovo sistema di coordinate Σ' ; infatti come nuove coordinate del punto x si possono semplicemente utilizzare i numeri x^i . È ovvio che il sistema di coordinate Σ' è differenziabile e che è anche analitico se il sistema originale Σ e la trasformazione (2.9) sono analitici. Il cambio da Σ a Σ' è una trasformazione differenziabile (analitica) delle coordinate. Anche il cambio inverso da Σ' a Σ è una trasformazione differenziabile o analitica delle coordinate.

In particolare, quando si trattano i *gruppi di trasformazioni di Lie*, si è interessati anche all'azione del gruppo di Lie in esame nel campo K . Siano a_1, \dots, a_r le coordinate di un elemento $a \in G$ e siano x^1, \dots, x^n le coordinate di un punto $x \in K$; allora l'azione della trasformazione a in K sarà data da

$$x^i = f^i(x^1, \dots, x^n; a_1, \dots, a_r), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

dove a_1, \dots, a_r sono anche detti i *parametri* delle trasformazioni. In questo modo si può, quindi, intendere un gruppo di Lie come un gruppo ad r parametri dove le funzioni di trasformazione da un sistema di coordinate in K ad un altro sono funzioni analitiche e delle coordinate di $x \in K$ e degli r

parametri. Il numero di parametri è quello essenziale nella descrizione della trasformazione, ovvero non servono più parametri per descrivere il passaggio da un sistema ad un altro.

Sia G un gruppo di Lie e siano Σ, Σ' due sistemi di coordinate differenziabili in K . Siano, inoltre, $f^i(x^1, \dots, x^n; a_1, \dots, a_r)$ funzioni tre volte continuamente differenziabili tali che la (2.10) sia verificata, con $x^i \in \Sigma, x'^i \in \Sigma'$. Allora gli r parametri a_1, \dots, a_r sono essenziali se non esiste alcuna funzione $\chi_k(a)$, con $1 \leq k \leq r$, per cui l'equazione lineare differenziale omogenea

$$\sum_{k=1}^r \chi_k(a) \frac{\partial f_i(x; a)}{\partial a_k} = 0 \quad \forall x, a \quad \text{con } i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

risulta verificata per tutti i valori di i, x, a .

Sicuramente se la (2.10) può essere sostituita¹ da un'equazione del tipo:

$$x'_i = F_i(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{r-m}) \quad (2.12)$$

dove $1 \leq m < r$, i parametri nella (2.12) non sono essenziali. In questo caso l'identità $f \equiv F$, verificata per tutti i valori di x , consente di determinare $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-m}$ come funzioni di a_1, \dots, a_r .

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{r-m}, \beta_{r-m+1}, \dots, \beta_{r-1}$$

dove $\beta_{r-m+1}, \dots, \beta_{r-1}$ sono funzioni opportune delle a di α aggiunte per arrivare ad un numero di $r - 1$ funzioni nel caso in cui $m > 1$. Tale equazione avrà soluzione per ogni funzione delle α , ed in particolare per F , con le x come parametri; a causa dell'identità tra F ed f , anche quest'ultima, poi, sarà soluzione della (2.11).

D'altra parte, se f è soluzione della (2.11), essa sarà funzione di qualcuna, o di tutte le $r - 1$ soluzioni

$$\gamma_1(a_1, \dots, a_r), \dots, \gamma_{r-1}(a_1, \dots, a_r)$$

ovvero:

$$f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \equiv F_i(x_1, \dots, x_n; \gamma_1, \dots, \gamma_{r-1})$$

La condizione ora dimostrata è, anche, necessaria e sufficiente affinché gli r parametri a_1, \dots, a_r siano essenziali.

¹dire che (2.12) può sostituire (2.10) vuol dire che da un dato insieme di parametri a è determinato (non necessariamente in modo unico) un altro insieme di α che sarà ricondotto alla medesima trasformazione

Le trasformazioni f^i devono, quindi, soddisfare tutte le richieste grupपालi. Così, data una trasformazione individuata dall'insieme di parametri a , è possibile trovare un insieme \bar{a} tale che:

$$x'' = f(x'; \bar{a}) = f(f(x; a); \bar{a}) = x \quad (2.13)$$

Se si applicano, poi, in successione, due trasformazioni appartenenti all'insieme:

$$\begin{aligned} x'_i &= f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \\ x''_i &= f_i(x'_1, \dots, x'_n; b_1, \dots, b_r) \end{aligned} \quad (2.14)$$

si richiede che anche la trasformazione risultante sia un elemento dell'insieme delle trasformazioni. Ovvero, deve esistere un insieme di parametri c_1, \dots, c_r tali che

$$x''_i = f_i(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_r) \quad (2.15)$$

I parametri c devono essere funzioni analitiche dei parametri a e b :

$$c_k = \phi_k(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r) \quad (2.16)$$

riottenendo così la (2.3). Si assume, quindi, che le funzioni ϕ_k siano analitiche, e che le \bar{a} nella (2.13) siano anch'esse funzioni analitiche delle a . Allora deve esistere un insieme di parametri a^0 che corrisponde alla trasformazione identità:

$$x' = f(x; a^0) = x \quad (2.17)$$

Gli assiomi grupपालi impongono, inoltre, delle severe restrizioni alle funzioni f_i :

$$\begin{aligned} x''_i &= f_i(x'; b) = f_i(f_1(x; a), \dots, f_n(x; a); b) = \\ &= f_i(x; c) = f_i(x; \phi(a; b)) \end{aligned} \quad (2.18)$$

e quindi

$$f(f(x; a); b) = f(x; \phi(a; b)) \quad (2.19)$$

è un'identità in x , a , b .

2.1.1 Gruppi continui finiti ed infiniti

Possiamo considerare l'equazione (2.10) da un'altro punto di vista che può chiarificare la differenza tra gruppi finiti ed infiniti. Partendo dalla (2.10), si possono differenziare le x' rispetto alle x , ottenendo un sistema di equazioni dalle quali l'insieme finito dei parametri a può essere eliminato. A sinistra, così, sarà presente un insieme di equazioni differenziali nelle x' che non contiene più alcun parametro arbitrario. Inoltre la soluzione generale di tale sistema di equazioni differenziali dipenderà giusto da r costanti arbitrarie, cioè si ritrova la (2.10). Ad esempio si consideri il gruppo continuo:

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + a_i, \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

Poiché le trasformazioni sono affini, tutte le derivate seconde di x'_i si annullano, così il sistema di equazioni differenziali risulta essere:

$$\frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \quad \text{con } i, j, k = 1, \dots, n$$

e non contiene alcun elemento arbitrario. Se le soluzioni di un insieme finito di equazioni differenziali che non contengono elementi arbitrari dipendono da un numero finito di parametri e formano un gruppo, allora si dice che il gruppo è un *gruppo continuo finito*. Un caso dove queste condizioni non sono soddisfatte, così che si parla di *gruppo continuo infinito*, è il seguente:

Le equazioni differenziali sono:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = 0, \quad \text{con } i \neq k = 1, \dots, n$$

Le soluzioni sono $x'_i = F_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ e chiaramente formano un gruppo, ma le funzioni F_i sono arbitrarie, così che non si possono etichettare le trasformazioni con un numero finito di parametri.

Esempi

1. Se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, allora x_1, \dots, x_n possono essere scelte come le coordinate di x . Questo sistema di coordinate è valido su tutto \mathbb{R}^n . Se $y = (y_1, \dots, y_n)$, allora le coordinate di $x+y$ sono x_1+y_1, \dots, x_n+y_n che sono funzioni analitiche delle coordinate di x, y .
2. Sia G il gruppo topologico di tutte le matrici reali non singolari $n \times n$. G è un gruppo di Lie analitico.

Introduciamo le coordinate in G come segue: una matrice arbitraria $x \in G$ può essere espressa nella forma

$$e + \|x_j^i\|$$

dove e identifica la matrice identità; si definiscono le coordinate di x come gli elementi della matrice $\|x_j^i\|$. In questo modo si ottiene un'applicazione φ di tutto il gruppo G su un dominio dello spazio Euclideo S di dimensione n^2 che associa la matrice identità con l'origine di S . La (2.3) assume quindi la seguente forma algebrica:

$$z_j^i = x_j^i + y_j^i + x_k^i y_j^k$$

Così G è un gruppo di Lie analitico. Analogamente le matrici non singolari complesse $n \times n$ formano un gruppo di Lie analitico di dimensione $2n^2$.

3. Sia G il gruppo delle omotetie, ovvero il gruppo delle trasformazioni dello spazio Euclideo S che dilatano le distanze di un fattore moltiplicativo a . Ogni omotetia viene etichettata attraverso il suo fattore moltiplicativo. Siano, in questo caso $x, y, z = xy$ i punti dello spazio S . Allora, date le omotetie $x' = ax, y' = by$, segue che $z' = abxy = cz$, con c funzione analitica di a e b .
Si osservi che il gruppo delle omotetie è un gruppo abeliano.
4. Sia $GL(n, \mathbb{C})$ il gruppo delle matrici $n \times n$ non-singolari a valori complessi. Se l'elemento di matrice $x_{ij} = x'_{ij} + ix''_{ij}$, allora i $2n^2$ numeri reali x'_{ij}, x''_{ij} possono essere scelti come coordinate per x . Tale sistema di coordinate è valido su tutto $GL(n, \mathbb{C})$. Le coordinate del prodotto matriciale xy sono polinomi nelle coordinate di x, y e quindi funzioni analitiche.

2.1.2 Prodotto semidiretto

Un concetto molto importante nello studio dei gruppi è il concetto di **prodotto semidiretto** (per il prodotto diretto vedi Definizione A.17): infatti molti esempi di prodotti semidiretti importanti per la fisica, sono anche gruppi di Lie.

Siano A, H due gruppi e per $h \in H$ sia

$$t_h : a \rightarrow h[a] \tag{2.20}$$

un automorfismo del gruppo A tale che $h \rightarrow t_h$ sia un omomorfismo di H nel gruppo degli automorfismi di A così che $h[a] = a, \forall a \in A$, se $h = e_H$, identità di H , e inoltre

$$t_{h_1 h_2} = t_{h_1} t_{h_2}, h_1, h_2 \in H \quad (2.21)$$

A questo punto $G = H \times A$ risulta essere un gruppo con moltiplicazione definita da:

$$(h, a) \cdot (h', a') = (hh', at_h[a']) \quad (2.22)$$

L'identità in G risulterà essere, invece $e = (e_H, e_A)$, con e_A identità in A . Inoltre

$$(h, a)^{-1} = (h^{-1}, h^{-1}[a^{-1}]) \quad (2.23)$$

G è detto **prodotto semidiretto di H ed A** ed indicato come

$$G = H \times_t A$$

Esempi

Sia G un gruppo di Lie e $\sigma : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ una rappresentazione matriciale continua. Sul prodotto $G \times \mathbb{R}^n$ si definisce la moltiplicazione

$$(g, x) \cdot (h, y) = (gh, \sigma(g)y + x)$$

Il gruppo risultante è il prodotto semidiretto di G ed \mathbb{R}^n e viene indicato con $G \times_\sigma \mathbb{R}^n$. Infine si può rappresentare l'elemento (g, x) con la matrice $(n+1) \times (n+1)$

$$\begin{pmatrix} \sigma(g) & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che fornisce una rappresentazione matriciale di $G \times_\sigma \mathbb{R}^n$.

Il gruppo euclideo $\mathfrak{E} = \text{SO}(3) \times_1 \mathbb{R}^3$ è un esempio particolare di questo caso generale. Esso risulta essere il prodotto semidiretto tra le traslazioni e le rotazioni in \mathbb{R}^3 , mentre il suo prodotto interno è dato da

$$(A, a) \cdot (B, b) = (AB, Ab + a)$$

Come si vedrà in seguito, invece, il gruppo di Galileo, ovvero il gruppo delle trasformazioni galileiane che consentono di passare da un sistema di riferimento fisso ad uno in moto, è isomorfo a

$$(\text{SO}(3) \times_1 \mathbb{R}^3) \times_\sigma (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$$

dove

$$\sigma(A, v) = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Sottogruppi ad un parametro

Nello studio dei gruppi di Lie assumono un ruolo molto importante i sottogruppi ad un parametro. Questi sottogruppi sono connessi con il gruppo di Lie in modo invariante, ovvero essi non dipendono dalla scelta delle coordinate, e permettono di introdurre nel gruppo un sistema di coordinate naturale. Prima di addentrarci nello studio dei sottogruppi ad un parametro dei gruppi di Lie, diamo alcune definizioni preliminari:

Definizione 2.2.

Sia G un gruppo di Lie. Allora un percorso $g(t)$ in G , definito per ogni $t \in \mathbb{R}$ sarà detto *sottogruppo ad un parametro* di G se esiste un numero positivo α così piccolo per cui

$$|s| < \alpha, |t| < \alpha, |s + t| < \alpha$$

e se vale la seguente condizione:

$$g(s + t) = g(s)g(t) \tag{2.24}$$

L'intervallo $|t| < \alpha$ sarà detto un *dominio di esistenza* del sottogruppo ad un parametro $g(t)$.

In altre parole, un sottogruppo ad un parametro è un omomorfismo dal gruppo di Lie \mathbb{R} al gruppo di Lie G . Alcune volte il termine *sottogruppo ad un parametro* è utilizzato per indicare l'immagine di tale omomorfismo. In questo senso un sottogruppo ad un parametro è un sottogruppo di Lie *virtuale*, ma non necessariamente un sottogruppo di Lie genuino.

Se $g(t)$ ed $h(t)$ sono due sottogruppi ad un parametro con domini di esistenza $|t| < \alpha$, $|t| < \beta$ rispettivamente e se esiste un numero positivo γ tale che per $|t| < \gamma$ $g(t) = h(t)$, allora, per la (2.24), $g(t) = h(t)$ per $|t| < \min(\alpha, \beta)$.

Se G è un gruppo topologico allora un sottogruppo ad un parametro $g(t)$ può, sempre per la (2.24), essere esteso, in uno ed un solo modo, ad un omomorfismo di tutto il gruppo topologico \mathbb{R} in G .

Definizione 2.3.

Sia G un gruppo di Lie e sia Σ un sistema di coordinate differenziabili in G . Per *arco* x in G si intende un'applicazione continua di un qualche intervallo $|t| \leq \alpha$ ($\alpha > 0$) in G che soddisfa alla condizione $x(0) = e$. L'arco x è detto possedere una tangente nel sistema di coordinate Σ se esiste la derivata

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = a^i \tag{2.25}$$

I numeri a^i possono essere visti come le componenti di un vettore detto *vettore tangente* di x .

Se si passa dal sistema di coordinate Σ ad un nuovo sistema di coordinate Σ' , per il significato di trasformazione differenziabile delle coordinate (2.9), allora nel nuovo sistema di coordinate il vettore a ottiene delle nuove coordinate che sono espresse, in funzione delle vecchie, dall'espressione

$$a'^i = p_j^i a^j$$

In questo modo si associa ad ogni gruppo di Lie un certo spazio vettoriale R^2 composto da tutti i vettori tangenti agli archi differenziabili in G .

²Sia G un gruppo di Lie, sia $x_1(t), \dots, x_n(t)$ un sistema di archi differenziabili linearmente indipendenti base di G e sia $f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ una funzione analitica in G . Un generico vettore tangente ad f nel punto di coordinate $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sarà dato dalla relazione:

$$a(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} a(x_i) \quad (a)$$

dove $a(x_i)$ è il vettore tangente di $x_i(t)$:

$$a(x_i) = \frac{dx_i}{dt}$$

Essendo f una funzione analitica, può essere espressa, in un intorno di $x_1(t), \dots, x_n(t)$ nella forma

$$f = c_0 + c_1(x_1 - x_1^0) + \dots + c_n(x_n - x_n^0) + \sum_{i,j=1}^n (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)g_{ij}$$

dove c_0, c_1, \dots, c_n sono reali, $x_i^0 = x_i(0)$, g_{ij} sono funzioni analitiche. Applicando a a quest'ultima, si ottiene

$$\begin{aligned} af &= c_1 a(x_1 - x_1^0) + \dots + c_n a(x_n - x_n^0) + a \left(\sum_{i,j=1}^n (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)g_{ij} \right) \\ &= c_1 a x_1 + \dots + c_n a x_n + \sum_{i,j=1}^n a \left((x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)g_{ij} \right) \end{aligned} \quad (b)$$

Utilizzando la differenziabilità dei vettori tangenti si trova che $a \left((x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)g_{ij} \right) = 0$ e quindi dalla (b) discende la (a).

Se si pone

$$a_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

si ottiene un vettore tangente a_i per cui $a_i(x_j) = \delta_{ij}$. Questi n vettori tangenti sono linearmente indipendenti, poiché $(\sum_i \lambda_i L_i)(x_j) = \lambda_j$. Comunque, se a è un vettore tangente qualsiasi, si ha $a(x_j) = (\sum_i a(x_i)a_i)(x_j)$ e quindi $a = \sum_i a(x_i)a_i$. Segue che lo spazio dei vettori tangenti (*spazio tangente*) è uno spazio vettoriale a dimensione n . (vedi [5])

Sia G un gruppo locale di Lie e sia Σ un sistema di coordinate differenziabili in G . Se $g(t)$ è un sottogruppo ad un parametro di G allora $g(t)$ è detto differenziabile nel sistema di coordinate Σ se l'arco $g(t)$ possiede un vettore tangente in quel sistema di coordinate. Il vettore tangente è detto **vettore direzione** di $g(t)$.

Per formulare convenientemente il teorema successivo sull'esistenza ed unicità del vettore direzione di un sottogruppo ad un parametro si introducono le seguenti funzioni ausiliarie

$$v_j^i(x) = v_j^i(x^1, \dots, x^r) = \frac{\partial}{\partial y^j} f^i(x^1, \dots, x^r; 0, \dots, 0) \quad (2.26)$$

Teorema 2.1.

Sia G un gruppo di Lie e sia Σ un sistema di coordinate differenziabili in G . Allora ogni sottogruppo ad un parametro $g(t)$ che possiede un vettore direzione a soddisfa al seguente sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d g^i(t)}{d t} = v_j^i(g(t)) a^j \quad (2.27a)$$

con condizioni iniziali

$$g^i(0) = 0 \quad (2.27b)$$

D'altra parte, ogni soluzione al problema delle equazioni (2.27a), (2.27b), determina un sottogruppo ad un parametro $g(t)$ con vettore direzione a .

Dal punto di vista dell'esistenza e dell'unicità della soluzione, segue che esiste in G un unico sottogruppo ad un parametro $g(t)$ con vettore direzione a . Comunque, segue dalla (2.27a) che le funzioni $g^i(t)$ sono tre volte continuamente differenziabili [analitiche] se Σ è differenziabile [analitico].

Dimostrazione. Se $g(t)$ è un sottogruppo ad un parametro con vettore direzione a , allora la condizione iniziale (2.27b) è soddisfatta poiché $g(0) = e$. Così per mostrare che le coordinate $g^i(t)$ soddisfano alle (2.27) è sufficiente calcolare la derivata

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g^i(t+s) - g^i(t)}{s} = (g^i)'(t) \quad (2.28a)$$

Dalle (2.24), (2.3), (2.4) si ottiene

$$g^i(t+s) = f^i(g(t), g(s)) = g^i(t) + v_j^i(g(t)) g^j(s) + \varepsilon^i s$$

dove $\varepsilon^i \rightarrow 0$ per $s \rightarrow 0$. Ma allora

$$\frac{g^i(t+s) - g^i(t)}{s} = v_j^i(g(t)) \frac{g^j(s)}{s} + \varepsilon^i$$

e segue che la derivata $(g^i)'(t)$ esiste e che le funzioni $g^i(t)$ soddisfano alla (2.27a).

Si assume, ora, che le funzioni $g^i(t)$ soddisfano alle (2.27) e si mostra che il punto $g(t)$ di coordinate $g^i(t)$ descrive un sottogruppo ad un parametro con vettore direzione a .

Si osserva che l'ultima asserzione, detto

$$\frac{d g^i(0)}{d t} = a^i$$

è immediata conseguenza della (2.5), così che tutto ciò che è necessario stabilire è che $g(t)$ è un sottogruppo ad un parametro.

Sia

$$g^*(t, u) = g(t)g(u) \quad (2.28b)$$

e siano $(g^*)^i(t, u)$ le sue coordinate. Si calcola la differenza

$$(g^*)^i(t, u) - g^i(t + u) = \varepsilon_1^i u \quad (2.28c)$$

mostrando che ε_1^i va a zero con u . Da un lato

$$(g^*)^i(t, u) = f^i(g(t), g(u))$$

quindi si ottiene

$$(g^*)^i(t, u) = g^i(t) + v_j^i(g(t))a^j u + \varepsilon_2^i u \quad (2.28d)$$

dove $\varepsilon_2^i \rightarrow 0$ con u . Dall'altro lato, per la (2.27a) si ha

$$g^i(t + u) = g^i(t) + v_j^i(g(t))a^j u + \varepsilon_3^i u \quad (2.28e)$$

dove $\varepsilon_3^i \rightarrow 0$ con u . Ma dalle (2.28d) e (2.28e) segue che $\varepsilon_1^i \rightarrow 0$ con u .

Ora si mostra che le funzioni $(g^*)^i(s, t)$ soddisfano al problema iniziale

$$\frac{\partial (g^*)^i(s, t)}{\partial t} = v_j^i(g^*(s, t))a^j \quad (2.28f)$$

$$(g^*)^i(s, 0) = g^i(s) \quad (2.28g)$$

Poiché la (2.28g) è un'immediata conseguenza della definizione (2.28b), resta solo da calcolare $\frac{\partial (g^*)^i(s, t)}{\partial t}$. Ora

$$(g^*)^i(s, t + u) = f^i(g(s), g(t + u))$$

e da questa, utilizzando la (2.28c), segue che

$$(g^*)^i(s, t + u) = f^i(g(s), g^*(t, u)) + \varepsilon_4^i u$$

dove $\varepsilon_4^i \rightarrow 0$ con u . Ma anche

$$(g^*)^i(s, t + u) = f^i(g^*(s, t), g(u)) + \varepsilon_4^i u$$

poiché la moltiplicazione è associativa in G . Finalmente, utilizzando la (2.26), si può riscrivere l'ultima equazione come

$$(g^*)^i(s, t + u) = (g^*)^i(s, t) + v_j^i(g^*(s, t)) a^j u \varepsilon_5^i u \quad (2.28h)$$

dove $\varepsilon_5^i \rightarrow 0$ con u e la (2.28f) segue immediatamente.

D'altra parte, il problema iniziale delle (2.28f), (2.28g) è soddisfatto anche dalle funzioni

$$\frac{\partial g^i(s + t)}{\partial t} = v_j^i(g(s + t)) a^j \quad (2.28i)$$

$$g^i(s + 0) = g^i(s) \quad (2.28j)$$

poiché la (2.28i) e la (2.27a) sono, infatti, la stessa equazione.

Così $(g^*)^i(s, t)$ e $g^i(s + t)$, considerate come funzioni dell'argomento t , soddisfano allo stesso iniziale problema. Dall'unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie segue che $g^*(s, t) = g(s + t)$ o, in altre parole, cge $g(s)g(t) = g(s + t)$. Così $g(t)$ è un sottogruppo ad un parametro e si conclude la dimostrazione del Teorema 2.1.

1. Sia, ora, G un gruppo di Lie e sia Σ un sistema di coordinate differenziabili definito in un intorno \mathcal{N} dell'identità di G . Un intorno $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ è detto **intorno a stella** se, insieme ad ogni punto (x^1, \dots, x^n) in \mathcal{M} , anche il punto (tx^1, \dots, tx^n) si trova in \mathcal{M} per $|t| \leq 1$.
2. Un sistema di coordinate Σ definito in un intorno a stella \mathcal{N} è detto **sistema di coordinate canonico del primo tipo** se per ogni sistema di quazioni $x^i = a^i t$ si determina un sottogruppo ad un parametro, definito per tutti i valori di t per cui il punto $(a^1 t, \dots, a^n t)$ appartiene ad \mathcal{N} . Si noti che una trasformazione lineare delle coordinate porta un sistema di coordinate canonico del primo tipo in un altro sistema di coordinate canonico del primo tipo.

Sia G un gruppo di Lie e sia Σ un sistema di coordinate canonico del primo tipo definito in un intorno \mathcal{N} . Allora ogni sottogruppo ad un parametro $g = g(t)$ che è differenziabile nel sistema di coordinate Σ e soddisfa alla

condizione $g(t) \in \mathcal{N}$ per tutti i $|t| \leq \alpha$, deve possedere un'espressione del tipo:

$$g^i(t) = a^i t \quad (2.29)$$

dove a^i sono i componenti del vettore direzione del sottogruppo $g(t)$.

Teorema 2.2.

Sia Σ un sistema di coordinate differenziabili [analitiche] in un gruppo di Lie G . Allora esiste un sistema di coordinate canonico del primo tipo Σ' tale che la trasformazione di coordinate da Σ a Σ' è differenziabile [analitica] e, comunque, tale che la matrice $\|p_j^i\|$ corrispondente alla trasformazione delle coordinate da Σ a Σ' è la matrice identità.

Teorema 2.3.

Se Σ è un arbitrario sistema di coordinate differenziabili in un gruppo di Lie G , e se $g(t)$ è un arbitrario sottogruppo ad un parametro, allora $g(t)$ è differenziabile in Σ .

- Sia G un gruppo di Lie e sia Σ un sistema di coordinate differenziabili [analitiche] in G . Si dirà che i sottogruppi ad un parametro $g_1(t), \dots, g_r(t)$ sono linearmente indipendenti nel sistema di coordinate Σ se i loro vettori direzione, calcolati in Σ , sono linearmente dipendenti. Sia n il numero di coordinate in Σ ; si selezioni in G un sistema di n sottogruppi ad un parametro linearmente indipendenti:

$$g_1(t), \dots, g_n(t)$$

Allora si definisce:

$$g(t^1, \dots, t^n) = g_1(t^1)g_2(t^2) \dots g_n(t^n) \quad (2.30)$$

Si verifica che esiste un numero positivo γ piccolo abbastanza così che per $|t^k| < \gamma$, $k = 1, \dots, n$, il prodotto (2.30) è definito; i punti così ottenuti occupano un certo intorno \mathcal{M}_γ dell'identità in G , poiché ognuno dei punti di \mathcal{M}_γ è rappresentato nella forma (2.30) in uno ed un solo modo per $|t^k| < \gamma$ e, infine, la transizione dal sistema di coordinate dato Σ al sistema di coordinate Σ^* con coordinate t^1, \dots, t^n così definito nell'intorno \mathcal{M}_γ è differenziabile [analitico]. Il sistema di coordinate Σ^* è detto **sistema canonico del secondo tipo**.

Teorema 2.4.

Siano Σ, Σ' due sistemi di coordinate differenziabili [analitiche] nello stesso

gruppo di Lie. Si indicano con x^1, \dots, x^r , e con x^1, \dots, x^s le coordinate di un punto x rispettivamente nei sistemi Σ e Σ' . Allora $s = r = n$ e quindi:

$$x'^i = \varphi^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

dove φ^i è una funzione tre volte continuamente differenziabile [analitica] ed il determinante funzionale

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}$$

non si annulla per $x^1 = \dots = x^n = 0$. Se Σ e Σ' sono entrambi sistemi di coordinate canoniche del primo tipo, allora le funzioni (2.31) sono lineari:

$$x'^j = \sum_{i=1}^n p_i^j x^i, \quad j = 1, \dots, n$$

2.3 Esempi di gruppi di Lie

Seguono una serie di esempi di gruppi di Lie in due dimensioni: $GL(2)$, $O(2)$, $U(2)$.

Esempio 2.3.1. *Gruppo lineare in due dimensioni, $GL(2)$*

Sia $GL(2)$ il gruppo delle trasformazioni dello spazio euclideo \mathbb{R}^2 , ovvero lo spazio delle trasformazioni del tipo:

$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2y \\ y' = a_3x + a_4y \end{cases}$$

con il determinante della matrice dei parametri non nullo, $a_1a_4 - a_2a_3 \neq 0$. Nella notazione matriciale, le trasformazioni possono così essere scritte:

$$r' = Ar, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Il gruppo lineare in due dimensioni è isomorfo al gruppo di matrici 2×2 , con il prodotto tra matrici come legge di combinazione. L'elemento identità è, pertanto, la matrice identità, mentre la trasformazione inversa avrà i parametri della matrice inversa rispetto alla matrice dei parametri della trasformazione diretta.

Il gruppo, a quattro parametri, è non abeliano.

Esempio 2.3.2. Gruppo ortogonale in due dimensioni, $O(2)$

Sia $O(2)$ il gruppo delle trasformazioni appartenenti a $GL(2)$ e che lasciano invariata la forma quadratica $x^2 + y^2$. Da ciò segue che:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (a_1x + a_2y)^2 + (a_3x + a_4y)^2 = x^2 + y^2 \\ a_1^2 + a_3^2 &= 1, \quad a_2^2 + a_4^2 = 1, \quad a_1a_3 + a_2a_4 = 0 \end{aligned}$$

I quattro parametri sono così soggetti a quattro relazioni funzionali, realizzando di fatto un gruppo ad un parametro, il gruppo delle rotazioni intorno all'origine degli assi:

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

dove φ è l'angolo di rotazione.

La trasformazione dello spazio associata alla rotazione di angolo φ è poi rappresentata dalla seguente matrice:

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Il gruppo è abeliano, infatti l'angolo risultante dalla composizione di due rotazioni è la somma degli angoli di ciascuna rotazione.

Esempio 2.3.3. Gruppo unitario in due dimensioni, $U(2)$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

una matrice 2×2 a valori complessi ($a_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i, j \leq 2$). Se sotto la sua azione $|x_1|^2 + |x_2|^2$ resta invariante, essa sarà detta matrice unitaria e quindi sarà un elemento del gruppo delle trasformazioni unitarie in 2 dimensioni $U(2)$.

Dall'invarianza di $|x_1|^2 + |x_2|^2$ seguono le seguenti relazioni tra i parametri:

$$\begin{aligned} |x'_1|^2 + |x'_2|^2 &= |a_{11}x_1 + a_{12}x_2|^2 + |a_{21}x_1 + a_{22}x_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \\ |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 &= 1, \quad |a_{12}|^2 + |a_{22}|^2 = 1, \quad a_{11}a_{12}^* + a_{21}a_{22}^* = 0 \end{aligned}$$

Si ottengono quattro relazioni funzionali per otto parametri, così il gruppo dipende essenzialmente da quattro parametri reali. Ciò segue semplicemente dalla richiesta di unitarietà della matrice: $AA^\dagger = 1$.

Seguono, ora, esempi di gruppi di Lie che agiscono in spazi a dimensione n : $GL(n)$, $SL(n)$, $O(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, gruppo di Weyl-Heisenberg.

Esempio 2.3.4. *Gruppo lineare generale in n dimensioni*, $GL(n, \mathbb{R})$

Il *gruppo lineare generale* in n dimensioni risponde alla seguente definizione:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \text{ in } M(n, \mathbb{R}) \text{ tale che } \det A \neq 0\} \quad (2.33)$$

dove $M(n, \mathbb{R})$ è il gruppo delle matrici a valori reali.

Un conveniente sistema di coordinate su $GL(n, \mathbb{R})$ è fornito da n^2 elementi matriciali e non è difficile vedere che $GL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie n^2 -dimensionale. Comunque, a differenza di $M(n, \mathbb{R})$, il sistema di coordinate fornito dagli n^2 elementi di matrice di $GL(n, \mathbb{R})$ non è topologicamente lo stesso di $M(n, \mathbb{R})$, a sua volta topologicamente identico a \mathbb{R}^{n^2} : ad esempio, esistono dei *loop* in $GL(n, \mathbb{R})$ che non possono essere semplicemente contratti ad un punto.

Simile è l'insieme

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{A \text{ in } M(n, \mathbb{C}) \text{ tale che } \det A \neq 0\} \quad (2.34)$$

che è un gruppo di Lie $2n^2$ -dimensionale. Si noti che per $n > 1$, sia $GL(n, \mathbb{C})$ sia $GL(n, \mathbb{R})$ sono non abeliani, poiché il prodotto di matrici AB è generalmente differente dal prodotto BA (vedi anche l'esempio **2.3.1**).

Infine l'insieme di matrici

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \text{ in } M(n, \mathbb{R}) \text{ tale che } \det A > 0\} \quad (2.35)$$

è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$, poiché

1. $\det I = 1$, e quindi $I \in GL^+(n, \mathbb{R})$;
2. $\det AB = \det A \det B$. Quindi $\det A > 0$ e $\det B > 0$ implicano che $\det AB > 0$, cioè $AB \in GL^+(n, \mathbb{R})$;
3. $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. Quindi se la matrice A appartiene al sottoinsieme $GL^+(n, \mathbb{R})$, vi appartiene anche la sua inversa A^{-1} .

Si noti che l'imposizione della condizione $\det A > 0$ seleziona uno dei due pezzi disgiunti in cui $GL(n, \mathbb{R})$ viene decomposto, in accordo con il segno di $\det A$. Così, come $GL(n, \mathbb{R})$, il sottogruppo $GL^+(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie di dimensione n^2 .

Esempio 2.3.5. *Gruppo lineare speciale in n dimensioni*, $SL(n, \mathbb{R})$

Il gruppo lineare speciale in n dimensioni è così definito:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \text{ in } GL(n, \mathbb{R}) \text{ tale che } \det A = 1\} \quad (2.36)$$

Anche questo, come $GL^+(n, \mathbb{R})$ è sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$. Si noti che, in questo caso, la condizione $\det A = 1$ è un'equazione polinomiale negli elementi di matrice A_{ij} , con $i, j = 1, \dots, n$. Segue che $SL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie la cui dimensione è $n^2 - 1$.

Allo stesso modo

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{A \text{ in } GL(n, \mathbb{C}) \text{ tale che } \det A = 1\} \quad (2.37)$$

è un gruppo di Lie di dimensione $2(n^2 - 1)$. È un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{C})$ per lo stesso motivo per cui $SL(n, \mathbb{R})$ è sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$.

Esempio 2.3.6. *Gruppo ortogonale in n dimensioni*, $O(n, \mathbb{R})$

Il gruppo ortogonale in n dimensioni, sottogruppo delle matrici ortogonali $n \times n$ del gruppo $GL(n, \mathbb{R})$, è uno dei gruppi più importanti in assoluto. Viene così definito:

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \text{ in } GL(n, \mathbb{R}) \text{ tale che } AA^T = I\} \quad (2.38)$$

dove A^T è la trasposta della matrice A .

Questo sottoinsieme di $GL(n, \mathbb{R})$ soddisfa alle tre condizioni per essere anche un sottogruppo:

1. $II^T = I$, così che l'elemento identità appartiene a $O(n, \mathbb{R})$;
2. se $AA^T = I$ e $BB^T = I$, allora $(AB)(AB)^T = (AB)B^T A^T = AA^T = I$, così il prodotto di due matrici ortogonali è ancora ortogonale;
3. Si noti che $A^{-1} = A^T$, se $AA^T = I$, e quindi $A^{-1}(A^{-1})^T = A^T A = A^{-1}A = I$, così l'inversa di una matrice ortogonale è ortogonale.

Così l'inversa di una matrice ortogonale è ancora ortogonale. Questo sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$ è anche un gruppo di Lie le cui dimensioni possono essere dedotte a partire dalla restrizione $AA^T = I$:

1. gli elementi della diagonale dell'equazione matriciale da $AA^T = I$ producono n equazioni polinomiali;
2. ci sono altre $(n^2 - n)/2$ equazioni dagli elementi di matrice posti sopra la diagonale;

3. gli elementi di matrice sotto la diagonale non aggiungono alcuna equazione, in quanto generano equazioni identiche a quelle per gli elementi sopra la diagonale.

Così $AA^T = I$ è equivalente a $n + (n^2 - n)/2 = (n^2 + n)/2$ equazioni polinomiali negli n^2 elementi della matrice A . Ciò implica che $O(n, \mathbb{R})$ ha dimensione $n^2 - (n^2 + n)/2 = n(n - 1)/2$.

L'equazione $AA^T = I$ implica che $\det A = \pm 1$. Il gruppo continuo $O(n, \mathbb{R})$ si può decomporre in due pezzi disgiunti secondo il segno di $\det A$, cosa che motiva la definizione del *gruppo ortogonale speciale*:

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) \text{ tale che } \det A = 1\} \quad (2.39)$$

La dimensione di quest'ultimo è la stessa di $O(n, \mathbb{R})$, $n(n - 1)/2$.

Il più semplice e non banale esempio di gruppo speciale ortogonale è $SO(2, \mathbb{R})$, che è l'insieme delle matrici reali 2×2 che soddisfano alle condizioni:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.40a)$$

$$\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \quad (2.40b)$$

Dalla (2.40a) seguono:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ ac + bd &= 0 \end{aligned} \quad (2.40c)$$

mentre dalla (2.40b) segue:

$$ad - bc = 1 \quad (2.40d)$$

A questo punto si ottengono alcune condizioni:

$$c = -\frac{bd}{a} = -\frac{b}{a} \frac{1 + bc}{a}$$

così che

$$c \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) = -\frac{b}{a^2}, \text{ cioè } c = -\frac{b}{a^2 + b^2} \quad (2.40e)$$

Ottenendo così che $c = -b$. In un modo simile si ottiene $d = a$.

Infine, senza perdere in generalità, si può scrivere che $a = \cos \theta$ e $b = \sin \theta$

per un certo angolo θ . Così la forma più generale per le matrici di $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ è

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{con } 0 \leq \theta < 2\pi \quad (2.40f)$$

Ciò mostra che $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ ha la struttura topologica di un cerchio, come il gruppo $\text{U}(1)$. Infatti, questi due gruppi di Lie abeliani e mono-dimensionali sono isomorfi con isomorfismo dato dalla mappa dell'elemento $e^{i\theta}$ in $\text{U}(1)$ sulla matrice A in $\text{SO}(2, \mathbb{R})$.

Esempio 2.3.7. *Gruppo unitario in n dimensioni, $\text{U}(n)$*

In analogia con il gruppo reale ortogonale, il *gruppo unitario* $\text{U}(n)$ è definito come:

$$\text{U}(n) = \{A \text{ in } \text{GL}(n, \mathbb{C}) \text{ tale che } AA^\dagger = I\} \quad (2.41)$$

dove A^\dagger indica l'aggiunta della matrice A ed è definita come $(A^\dagger)_{ij} = A_{ij}^*$, dove A_{ij}^* è la complessa coniugata di A_{ij} , con $0 \leq i, j \leq n$. Il fatto che $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ mostra che $\text{U}(n)$ è invece un sottogruppo genuino di $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ ed un argomento simile a quello proposto per $\text{O}(m, \mathbb{R})$ mostra che la dimensione reale di questo gruppo di Lie è n^2 .

Esempio 2.3.8. *Gruppo speciale unitario in n dimensioni, $\text{SU}(n)$*

Il *gruppo speciale unitario* è uno dei gruppi più importanti nella fisica, in particolare nell'ambito delle particelle elementari e nella costruzione delle teorie della Grande Unificazione. Esso è definito per ogni n come

$$\text{SU}(n) = \{A \in \text{U}(n) \text{ tale che } \det A = 1\} \quad (2.42)$$

La sua dimensione è di $n^2 - 1$.

Uno dei gruppi più importanti per la fisica è certamente $\text{SU}(2)$. Per studiare al meglio la struttura del gruppo tridimensionale $\text{SU}(2)$, si partirà con il gruppo quadridimensionale $\text{U}(2)$. Questo è definito come l'insieme di tutte le matrici complesse 2×2 che soddisfano a $AA^\dagger = I$. Così $\text{U}(2)$ è l'insieme di matrici

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tale che } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.43a)$$

che implica

$$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1 \quad (2.43b)$$

$$ac^* + bd^* = 0 \quad (2.43c)$$

La condizione $\det A = 1$ di $SU(2)$ impone, in più, la seguente restrizione sui parametri complessi a, b, c, d :

$$ad - bc = 1 \quad (2.43d)$$

Da queste restrizioni si ricava che:

$$c = -b^*, d = a^* \quad (2.43e)$$

così che una matrice generale di $SU(2)$ è della forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{con } |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (2.43f)$$

Una possibile base per il gruppo è composta dalle *matrici di Pauli* moltiplicate per l'unità immaginaria i :

$$i\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43g)$$

$$i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43h)$$

$$i\sigma_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (2.43i)$$

Questa è la rappresentazione maggiormente utilizzata in meccanica quantistica per rappresentare lo spin delle particelle, come ad esempio l'elettrone. Dal punto di vista topologico, lo spazio del gruppo $SU(2)$ è l'insieme di tutte le coppie di numeri complessi (a, b) che soddisfano alla restrizione (2.43f); ma ad un numero complesso a corrisponde una coppia di numeri reali $(\Re a, \Im a)$, dove $\Re a$ ed $\Im a$ sono rispettivamente la parte reale ed immaginaria di a . Così si può pensare allo spazio del gruppo $SU(2)$ come all'insieme di tutte le quadruple reali $(\Re a, \Im a, \Re b, \Im b)$ che soddisfano a

$$(\Re a)^2 + (\Im a)^2 + (\Re b)^2 + (\Im b)^2 = 1 \quad (2.43j)$$

e questa è proprio l'equazione di un'ipersfera nello spazio cartesiano reale a 4 dimensioni \mathbb{R}^4 , ovvero, dal punto di vista topologico, $SU(2)$ è un'ipersfera. In fisica il gruppo $SU(2)$ ha grande importanza per il Modello Standard delle particelle elementari: esso, infatti, si basa su un gruppo di simmetria così composto:

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

Nelle teorie della Grande Unificazione molti modelli fanno uso di gruppi $SU(n)$, come $SU(6)$, $SU(5)$, $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$, $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$.

Esempio 2.3.9. Gruppo di Weyl-Heisenberg

Come ultimo esempio di gruppo di Lie si cita il *gruppo di Weyl-Heisenberg*, strettamente connesso con le relazioni di commutazione canoniche per il moto di una particella.

Il gruppo può essere visto come un insieme di matrici triangolari del tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.44a)$$

dove a è un vettore riga di lunghezza n , b un vettore colonna di lunghezza n , 1_n la matrice identità $n \times n$.

La legge di composizione è:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1_n & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & c+c'+ab' \\ 0 & 1_n & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.44b)$$

mentre l'elemento inverso è

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & -c+ab \\ 0 & 1_n & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.44c)$$

L'algebra di Lie corrispondente è costituita da matrici del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0_n & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.44d)$$

Scelta come base il sistema di tre matrici:

$$p_i = \begin{pmatrix} 0 & e_i & 0 \\ 0 & 0_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.44e)$$

$$q_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_n & e_j^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.44f)$$

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.44g)$$

l'algebra di Lie viene caratterizzata dalle seguenti relazioni di commutazione:

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij} z \quad (2.44h)$$

$$[p_i, z] = [q_j, z] = 0 \quad (2.44i)$$

che altro non sono se non le relazioni di commutazione canoniche per gli operatori posizione ed impulso.

2.4 Gruppi coprenti

Per ogni gruppo G appartenente alla classe dei gruppi di Lie connessi si può costruire un gruppo G^* tale che ogni gruppo H localmente isomorfo a G , è globalmente isomorfo con il gruppo fattore G^*/N , dove N è un sottogruppo normale discreto di G^* . Il gruppo G^* è detto **copertura universale di G** . È anche la copertura universale di ogni gruppo localmente isomorfo con G , ed è unicamente determinato per una classe di gruppi mutualmente isomorfi.

Teorema 2.5.

Ogni gruppo di Lie G connesso è localmente isomorfo ad un gruppo di Lie G^* connesso e semplicemente connesso.

L'isomorfismo locale da G^* a G si estende, poiché G è semplicemente connesso, ad un unico omomorfismo $\sigma : G^* \rightarrow G$. Sia V un insieme aperto in G^* contenente l'identità tale che σ è iniettiva su V . Allora per ogni $x \in G^*$, xV è un intorno aperto di x e σ è iniettiva su xV . Quindi σ è localmente un omeomorfismo. G^* è detto il **gruppo coprente semplicemente connesso di G** e σ è l'**applicazione coprente**.

Teorema 2.6.

Il nucleo dell'applicazione coprente $\sigma : G^* \rightarrow G$ è un sottogruppo normale discreto di \tilde{G} ed è contenuto nel centro di G .

Il nucleo K di σ è discreto poiché σ è localmente un omeomorfismo, ed è normale poiché σ è un omomorfismo. Per ogni $k \in K$ l'applicazione $G^* \rightarrow K$, $x \rightarrow xkx^{-1}$ è un'applicazione continua di uno spazio connesso in uno spazio discreto e quindi la sua immagine è il singolo $\{k\}$. Così $xkx^{-1} = k$ per ogni $x \in G^*$, $k \in K$, come richiesto.

Corollario 2.1.

$G \approx G^*/K$, dove G^* è semplicemente connesso e K è un sottogruppo centrale discreto.

La costruzione del gruppo coprente G^* può essere schematizzata come segue. Un punto di G^* è definito come un arco in G con punto iniziale in e ; due archi di questo tipo sono identificati se sono omotopici (continuamente deformabili uno nell'altro) mentre i loro punti finali sono presi fissati. L'applicazione coprente $\sigma : G^* \rightarrow G$ è ottenuta dall'assegnazione ad ogni arco del suo punto finale. Il nucleo di σ è isomorfo al gruppo fondamentale di G . L'utilità del gruppo coprente deriva dal fatto che consente di estendere gli omomorfismi locali ad omomorfismi globali.

Teorema 2.7.

Dato un omomorfismo locale ρ da un gruppo di Lie G connesso ad un gruppo di Lie H connesso, esiste un unico omomorfismo t da G^* a \tilde{H} tale che $\tau \circ t = \rho \circ \sigma$:

$$\begin{array}{ccc} G^* & \xrightarrow{t} & \tilde{H} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \tau \\ G & \xrightarrow{\rho} & H \end{array}$$

dove σ e τ sono applicazioni coprenti.

Se ρ è un isomorfismo locale, allora t è un isomorfismo.

Corollario 2.2.

Due gruppi di Lie connessi G, H sono localmente isomorfi se e solo se essi posseggono gruppi coprenti semplicemente connessi isomorfi. In particolare $G \approx G^*/K_1, H \approx G^*/K_2$, dove K_1, K_2 sono sottogruppi centrali discreti di G^* .

2.5 Trasformazioni infinitesime

Sia $g(a)$ un sottogruppo ad un parametro, con parametro a , e sia Σ un sistema di coordinate differenziabile. Sia poi f una trasformazione delle coordinate, associata al sottogruppo $g(a)$, tale che $x'^i = f^i(x^i, \dots, x^n; a)$, con x' punto del sistema di coordinate differenziabili Σ' . Essendo f differenziabile, uno spostamento infinitesimo del parametro, $a + da$, porterà i punti x nei punti $x' + dx'$ (f è una funzione analitica di a). Si hanno, allora, due percorsi alternativi per andare da x ad $x' + dx'$:

$$x' + dx' = f(x; a + da) \quad (2.45)$$

o anche

$$x' = f(x; a), \quad x' + dx' = f(x'; \delta a) \quad (2.46)$$

Espandendo l'ultima equazione si ottiene:

$$dx' = \left(\frac{\partial f(x'; a)}{\partial a} \right)_{a=a_0} \cdot \delta a = u(x') \delta a \quad (2.47)$$

Dalla (2.16) e dal confronto tra (2.45) e (2.46), segue che:

$$a + da = \phi(a; \delta a) \quad (2.48)$$

così che

$$d a = \left(\frac{\partial \phi(a; b)}{\partial b} \right)_{b=a_0} \cdot \delta a \quad (2.49)$$

o più brevemente

$$\delta a = \psi(a) d a \quad (2.50)$$

Sostituendo la (2.50) nella (2.47) si ottiene:

$$\begin{aligned} d x' &= u(x') \psi(a) d a \\ \frac{d x'}{u(x')} &= \psi(a) d a \end{aligned} \quad (2.51)$$

Si integra la (2.51) da $a = a_0$ ad a . Il valore iniziale di x' è x . Chiamando l'integrale di $1/u(x')$, $U(x')$, si ottiene:

$$U(x') - U(x) = \int_{a_0}^a \psi(a) d a \quad (2.52)$$

Se si introducono le nuove variabili $y = U(x)$ e si pone $\int_{a_0}^a \psi(a) d a = t$, la (2.52) può essere scritta come:

$$y' - y = t \quad (2.53)$$

Però una trasformazione delle coordinate o l'introduzione di nuove variabili, trasforma semplicemente tutti gli elementi del gruppo dalla stessa trasformazione. Così si vede che un gruppo continuo ad un parametro è equivalente ad un gruppo di traslazioni, e deve essere abeliano.

Si propone, ora, una generalizzazione delle trasformazioni infinitesime con parametro $d a$ utilizzate con un sottogruppo ad un parametro g . È importante notare che le equazioni che seguiranno valgono indipendentemente dal numero di parametri essenziali tipici del gruppo.

Si generalizza la (2.46) al caso di r parametri a_1, \dots, a_r :

$$\begin{aligned} x'_i &= f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r), \quad i = 1, \dots, n \\ x'_i + d x'_i &= f_i(x'_1, \dots, x'_n; \delta a_1, \dots, \delta a_r) \end{aligned} \quad (2.54)$$

dove

$$\begin{aligned} d x'_i &= \sum_{k=1}^r \left[\frac{\partial f_i(x'_1, \dots, x'_n; a_1, \dots, a_r)}{\partial a_k} \right]_{a=a_0} \delta a_k \\ &= \sum_{k=1}^r u_{ik}(x') \delta a_k \end{aligned} \quad (2.55)$$

con

$$a_l + d a_l = \phi(a_1, \dots, a_r; \delta a_1, \dots, \delta a_r) \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} d a_l &= \sum_{m=1}^r \left[\frac{\partial \phi_l(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r)}{\partial b_m} \right]_{b=a_0} \delta a_m \\ &= \sum_{m=1}^r \Theta_{lm}(a) \delta a_m \end{aligned} \quad (2.57)$$

Per $a = 0$, $\Theta_{lm}(0) = \delta_{lm}$.

Risolvendo la (2.57) per i δa in termini dei $d a$, si ottiene:

$$\delta a_k = \sum_{l=1}^r \psi_{kl}(a) d a_l \quad (2.58)$$

dove le matrici Ψ e Θ soddisfano a

$$\Psi \Theta = 1, \quad \psi_{kl}(0) = \delta_{kl}$$

Sostituendo nella (2.55), si ottiene:

$$d x'_i = \sum_{k,l=1}^r u_{ik}(x') \psi_{kl}(a) d a_l \quad (2.59)$$

o anche

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \sum_{k=1}^r u_{ik}(x') \psi_{kl}(a) \quad (2.60)$$

Nella (2.60) le x' possono essere considerate come funzioni dei parametri a .

Le coordinate x sono i valori iniziali della x' per $a = 0$.

Se solo uno dei parametri è cambiato dallo zero, allora si ottiene un sottogruppo ad un parametro ed una particolare trasformazione infinitesima.

Ogni trasformazione infinitesima è una combinazione lineare delle r infinite-
sime trasformazioni indipendenti. Se si esamina il cambio di funzione $F(x)$
sotto trasformazione infinitesima, si trova:

$$\begin{aligned} d F &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} d x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \sum_{l=1}^r u_{il}(x) \delta a_l \\ &= \sum_{l=1}^r \delta a_l \left(\sum_{i=1}^n u_{il}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) F = \sum_{l=1}^r \delta a_l X_l F \end{aligned} \quad (2.61)$$

Gli operatori

$$X_p = \sum_{i=1}^n u_{ip}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.62)$$

sono detti *operatori infinitesimi* del gruppo, ovvero essi rappresentano la trasformazione infinitesima (2.55).

Infatti l'operatore $1 + \sum_p X_p \delta a_p$ si avvicina all'operatore identità. Quando si sceglie la funzione F per essere una delle variabili x_i , si trova

$$x'_i = \left[1 + \sum_p X_p \delta a_p \right] x_i = x_i + \sum_p u_{ip}(x) \delta a_p$$

così che si ritrova la (2.55).

Si noti che se i termini di ordine più alto nell'infinitesimo δa sono trascurati, la trasformazione infinitesima commuta con un'altra. Infatti, il risultato di due successive trasformazioni infinitesime è giusto la somma delle due.

Esempi

1. Sia G il gruppo delle omotetie non omogenee, ovvero il gruppo delle trasformazioni dello spazio che portano il sistema di coordinate differenziabile Σ nel sistema Σ' : $x' = ax + b$. L'elemento identità ha parametri $a = 1$, $b = 0$. Le trasformazioni infinitesime sono:

$$x' = (1 + \delta a)x + \delta b = x + x \cdot \delta a + \delta b; \quad dx = x \cdot \delta a + \delta b$$

Così gli operatori infinitesimi del gruppo sono:

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$$

Si noti che la parentesi di commutazione $[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1 = -(\partial/\partial x) = -X_2$ non produce alcun nuovo operatore, ma è ancora una delle trasformazioni infinitesime del gruppo.

2. Sia G il gruppo delle trasformazioni dello spazio omogenee a due parametri che trasforma il sistema di coordinate Σ' nel sistema Σ nel modo seguente:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

L'elemento identità ha $a = b = 1$. Le trasformazioni infinitesime sono:

$$\begin{aligned}x' &= (1 + \delta a)x = x + x \cdot \delta a \\y' &= (1 + \delta b)y = y + y \cdot \delta b\end{aligned}$$

così che gli operatori infinitesimi del gruppo sono:

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}$$

In questo caso i due operatori commutano: $[X_1, X_2] = 0$.

3. Sia il gruppo G un gruppo ad un parametro che trasforma lo spazio nel modo seguente:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = \frac{1}{a}y \end{cases}$$

l'elemento identità è dato da $a = 1$; la trasformazione infinitesima è

$$\begin{aligned}x' &= (1 + \delta a)x = x + x \cdot \delta a \\y' &= (1 + \delta a)^{-1}y = (1 - \delta a)y = y - y \cdot \delta a\end{aligned}$$

e l'operatore infinitesimo è

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$$

4. Sia $GL(2)$ il gruppo lineare in 2 dimensioni (vedi esempio 2.3.1), la cui trasformazione generica può essere scritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\y' &= cx + dy\end{aligned}$$

l'elemento identità è identificato dai parametri $a = d = 1$ e $b = c = 0$; le trasformazioni infinitesime invece sono

$$\begin{aligned}x' &= (1 + \delta a)x + \delta b \cdot y = x + x \cdot \delta a + y \cdot \delta b \\y' &= \delta c \cdot x + (1 + \delta d)y = y + x \cdot \delta c + y \cdot \delta d\end{aligned}$$

I quattro operatori infinitesimi del gruppo sono

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = y \frac{\partial}{\partial y}$$

mentre i corrispondenti comutatori sono:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -X_2, & [X_1, X_3] &= X_3, & [X_1, X_4] &= 0 \\ [X_2, X_3] &= X_4 - X_1, & [X_2, X_4] &= -X_2, & [X_3, X_4] &= X_3 \end{aligned}$$

Si può vedere che tutte le parentesi di commutazione possono essere espresse come combinazione lineare degli operatori infinitesimali stessi.

5. Per il gruppo delle rotazioni in due dimensioni (vedi esempio 2.3.2):

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned}$$

le trasformazioni infinitesime sono ottenute espandendo le espressioni per x ed y intorno al valore $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} x' &= x - y \cdot \delta\varphi \\ y' &= x \cdot \delta\varphi + y \end{aligned}$$

L'operatore infinitesimo è l'operatore momento angolare:

$$X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

Le trasformazioni ortogonali sono caratterizzate dalla regola che la matrice trasposta A^T della matrice A coincide con la sua inversa:

$$A^T A = 1$$

Le rotazioni proprie hanno determinante 1, così che le rotazioni infinitesime hanno forma

$$A = 1 + B$$

dove 1 è la matrice identità e B ha tutti i suoi elementi appartenenti ad un intorno dello zero. La condizione di ortogonalità richiede che

$$1 = A^T A = (1 + B)(1 + B^T) \approx 1 + B + B^T$$

o $B + B^T = 0$. Così B deve essere una matrice simmetrica con tre componenti indipendenti:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \zeta & -\eta \\ -\zeta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{pmatrix}$$

dove ξ, η, ζ sono delle costanti.

Le rotazioni infinitesime sono:

$$\begin{aligned} dx &= y\zeta - z\eta \\ dy &= -x\zeta + z\xi \\ dz &= x\eta - y\xi \end{aligned}$$

mentre gli operatori infinitesimi sono

$$X_1 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

ovvero gli operatori momento angolare per le tre direzioni. I loro commutatori sono le familiari espressioni:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2$$

2.6 L'algebra di Lie

Sia G un gruppo di Lie di dimensione n e sia Σ un sistema di coordinate differenziabili in G . Se x, y sono elementi di G sufficientemente vicini all'identità e allora anche il prodotto $g = g(x, y)$ è vicino ad e e, nel sistema di coordinate Σ , la regola di composizione è la (2.3).

Poiché le coordinate di e sono tutte pari a 0, valgono anche le relazioni (2.4). Poiché le g^i sono tre volte differenziabili, possono essere espanse in serie di Taylor fino al termine di ordine tre:

$$g^i = x^i + y^i + a_{jk}^i x^j y^k + g_{jkl}^i x^j x^k y^l + h_{jkl}^i x^j y^k y^l + \varepsilon_1^i \quad (2.63)$$

dove ε_1^i è un infinitesimo di ordine quattro rispetto alle coordinate di x ed y . I numeri:

$$c_{jk}^i = a_{jk}^i - a_{kj}^i \quad (2.64)$$

sono detti **costanti di struttura** di G nel sistema di coordinate Σ . Chiaramente le costanti di struttura sono antisimmetriche rispetto allo scambio di due indici: $c_{jk}^i = -c_{kj}^i$.

La (2.63) mostra che ogni gruppo di Lie, al primo ordine di approssimazione, è commutativo ed isomorfo ad un gruppo vettoriale, e che relazioni di commutazione non banali compariono nella seconda approssimazione. Anche nel caso di un gruppo G commutativo potrebbe esistere un sistema di coordinate per cui i termini di secondo grado nella (2.63) non si annullano. Comunque

è chiaro che, nel caso di gruppo abeliano, $a_{jk}^i = a_{kj}^i$, in modo tale che le costanti di struttura siano nulle.

Siano x, y elementi di G . Si considera il loro commutatore (vedi la (A.5)):

$$q(x, y) = xyx^{-1}y^{-1} = q$$

Quest'ultima può essere scritta in termini delle coordinate di x, y :

$$q^i = c_{jk}^i x^j y^k + \varepsilon_2^i \quad (2.65)$$

dove ε_2^i è un infinitesimo di grado 2 rispetto alle coordinate di x ed y . Così la (2.65) può essere utilizzata per definire le costanti di struttura.

Per verificare la (2.65), bisogna prima utilizzare la (2.63) per ottenere un secondo ordine di approssimazione per le coordinate di z' inverso di z elemento di G . Dopo alcuni calcoli si trova che, se $zz' = e$, allora:

$$z'^i = -z^i + a_{jk}^i z^j z^k + \varepsilon_4^i$$

Posto $z^* = xy$ e $z = yx$, il commutatore diventa $q = z^* z'$ e quindi, utilizzando la (2.63) con la (2.64) e con la relazione tra le coordinate di z' e quelle di z si ottiene:

$$\begin{aligned} q^i &= (x^i + y^i + a_{jk}^i x^j y^k) + (-x^i - y^i - a_{kj}^i x^j y^k) + \\ &\quad + a_{jk}^i (x^j + y^j)(x^k + y^k) - a_{jk}^i (x^j + y^j)(x^k + y^k) + \varepsilon_2^i \\ &= c_{jk}^i x^j y^k + \varepsilon_2^i \end{aligned}$$

che verifica la (2.65).

Infine, in aggiunta all'antisimmetria, le costanti di struttura posseggono anche un'ulteriore importante proprietà:

$$c_{is}^p c_{jk}^s + c_{js}^p c_{ki}^s + c_{ks}^p c_{ij}^s = 0 \quad (2.66)$$

che è il modo di scrivere, utilizzando le costanti di struttura, l'identità di Jacobi (vedi 2.4.3).

Definizione 2.4.

Sia k un campo (ad esempio i reali). Uno spazio vettoriale \mathfrak{g} su k è detto *algebra di Lie su k* se esiste un'applicazione

$$(a, b) \rightarrow [a, b], \text{ con } a, b, [a, b] \in \mathfrak{g} \quad (2.67)$$

di $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ per cui valgono le seguenti proprietà:

1. $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c];$

2. $[a, b] + [b, a] = 0$;
3. $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ (*identità di Jacobi*)

per ogni $a, b, c \in \mathfrak{g}$, e α, β numeri reali.

Dai punti 1. e 2. della Definizione 2.4, segue che i commutatori possono essere espressi in termini di un sistema di coordinate nel modo seguente:

$$c^i = [a, b]^i = c^*_{jk}{}^i a^j b^k \quad (2.68)$$

Gli scalari $c^*_{jk}{}^i$ sono detti **costanti di struttura di \mathfrak{g}** nel sistema di coordinate dato. Dai punti 2. e 3. della Definizione 2.4 segue che le costanti di struttura nel sistema di coordinate dato sono antisimmetriche per lo scambio di due indici vicini e verificano una relazione tipo la (2.66):

$$c^*_{is}{}^p c^*_{jk}{}^s + c^*_{js}{}^p c^*_{ki}{}^s + c^*_{ks}{}^p c^*_{ij}{}^s = 0$$

D'altra parte se in uno spazio vettoriale G sui reali esiste un sistema di scalari $c^*_{jk}{}^i$ che è antisimmetrico per lo scambio di due indici vicini e per cui la (2.66) è verificata, allora la (2.68) può essere utilizzata per definire una relazione di commutazione in G che conduce ad un'algebra di Lie. Quindi lo studio dei sistemi di costanti di struttura $c^*_{jk}{}^i$, antisimmetriche per lo scambio di due indici vicini e che soddisfano alla (2.66) è equivalente allo studio dell'algebra di Lie.

A questo punto, per poter dire che l'algebra di Lie \mathfrak{g} è l'algebra del gruppo di Lie G , bisogna mostrare che le costanti di struttura definite nella (2.65), ovvero quelle definite sul gruppo G , e quelle definite nella (2.68), ovvero quelle definite sull'algebra \mathfrak{g} , sono identiche.

Siano a, b vettori di \mathfrak{g} . Siano $x(t), y(t)$ archi di G che hanno come vettori tangenti rispettivamente a, b . Anche:

$$q(t) = x(t)y(t)(x(t))^{-1}(y(t))^{-1}$$

sarà un arco in G . Introdotto il parametro s tale che $t = \sqrt{s}$, l'arco $q(\sqrt{s})$ ha un vettore tangente c . In questo modo è semplice vedere che:

$$c = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{q^i(t)}{t^2}$$

Utilizzando la (2.65) e la Definizione di arco, si ricava:

$$c^i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (c_{jk}{}^i x^j(t) y^k(t) + \varepsilon(t)) = c_{jk}{}^i a^j b^k$$

che coincide con la (2.68):

$$c^i = [a, b]^i = c_{jk}{}^i a^j b^k$$

Quindi:

Definizione 2.5.

Siano G gruppo di Lie, \mathfrak{g} spazio vettoriale con prodotto definito dalla (2.67). \mathfrak{g} sarà detta *l'algebra di Lie del gruppo di Lie G* se le costanti di struttura (2.68) di \mathfrak{g} sono identiche alle costanti di struttura (2.65) di G .

Se un'algebra di Lie \mathfrak{g} ha dimensione finita, come uno spazio vettoriale, possiede una base a_1, \dots, a_n per cui vale la seguente relazione:

$$[a_j, a_k] = \sum_{i=1}^n c_{jk}^i a_i$$

dove c_{jk}^i sono le costanti di struttura di \mathfrak{g} rispetto alla base data.

Le costanti di struttura sono chiaramente determinate a meno di un isomorfismo. Se $T : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ è una rappresentazione matriciale di \mathfrak{g} (dove $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ è l'algebra di Lie di $\text{GL}(n, \mathbb{C})$), allora:

$$[Ta_j, Ta_k] = T[a_j, a_k] = T\left(\sum_{i=1}^n c_{jk}^i a_i\right) = \sum_{i=1}^n c_{jk}^i Ta_i$$

Ciò mostra che le matrici $T(a_i)$ devono soddisfare alle relazioni di commutazione:

$$T(a_j)T(a_k) - T(a_k)T(a_j) = \sum_{i=1}^n c_{jk}^i T(a_i)$$

D'altra parte, data una famiglia di matrici $T(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, che soddisfa a queste regole di commutazione, allora ciò definisce un'unica rappresentazione matriciale di \mathfrak{g} .

Esempio 2.6.1.

Sia $x(s)$ un arco nel gruppo $\text{SU}(n)$ delle matrici unitarie $n \times n$ a determinante 1, con $x(0) = 1$. Differenziando l'equazione

$$x(s)\overline{x(s)^t} = 1, \quad \det x(s) = 1$$

e ponendo $s = 0$ si ottiene:

$$x'(0) + \overline{x'(0)^t} = 0, \quad \text{traccia di } x'(0) = 0$$

Il vettore tangente all'identità $x'(0)$ è quindi una matrice hermitiana anti-simmetrica di traccia nulla. D'altra parte, se X è una matrice hermitiana anti-simmetrica di traccia nulla, allora:

$$s \rightarrow e^{sX} = 1 + sX + \frac{s^2}{2!}X^2 + \frac{s^3}{3!}X^3 + \dots$$

è un arco in $\text{SU}(n)$ con X vettore tangente all'identità. L'algebra di Lie di $\text{SU}(n)$ è quindi l'algebra $\mathfrak{su}(n)$ di tutte le matrici $n \times n$ anti-simmetriche a traccia nulla.

2.6.1 Gruppi lineari

Sia V uno spazio vettoriale sul campo, ad esempio, dei reali \mathbb{R} , e sia \mathfrak{v} un insieme di trasformazioni lineari di V in se stesso che contiene, insieme ad ogni coppia di trasformazioni a, b , anche la trasformazione $ab - ba$, e tutte le combinazioni lineari $\alpha a + \beta b$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora \mathfrak{v} è automaticamente uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Si definisce un prodotto in \mathfrak{v} scrivendo:

$$[a, b] = ab - ba$$

Con questa definizione \mathfrak{v} diventa un'algebra di Lie. Un'algebra di tal genere è detta **algebra di Lie lineare**.

Sia V uno spazio vettoriale reale (o complesso) e sia G l'insieme degli automorfismi di V che costituiscono un gruppo di Lie di trasformazioni lineari. Un gruppo di Lie G di tal genere è detto **gruppo lineare**. Sia $x(t)$ un arco in G per cui, per $t = 0$, $x(0) = e$, con e identità in G . Poiché l'insieme delle trasformazioni lineari di V in se stesso forma uno spazio vettoriale reale, ha senso definire la derivata della trasformazione lineare della funzione $x(t)$ in $t = 0$:

$$a = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(0)}{t}$$

Così la derivata, assumendone l'esistenza, è ancora una trasformazione lineare su V ; si dirà che essa è tangente ad $x(t)$. L'insieme di tutte le trasformazioni lineari di V che sono tangenti ad archi in G costituisce un'algebra di Lie lineare \mathfrak{v} che è isomorfa all'algebra di Lie \mathfrak{g} di G . Infatti, per ogni fissato s , la tangente alla curva $t \rightarrow y(s)^{-1}x(t)y(s)$ è la matrice $y(s)^{-1}ay(s)$. Poiché questa matrice appartiene allo spazio vettoriale reale \mathfrak{g} per ogni s , anche la derivata:

$$\frac{d}{ds}[y(s)^{-1}ay(s)]_{s=0} = ay'(0) - y'(0)a = ab - ba$$

appartiene a \mathfrak{g} .

Inoltre se $x(t)$ è un sottogruppo ad un parametro di G con trasformazione tangente a , allora $x(t)$ soddisfa all'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t)$$

2.6.2 Omomorfismi locali

Un omomorfismo locale $\Phi : G \rightarrow H$ tra gruppi lineari di Lie induce un'applicazione $L(\Phi) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tra le corrispondenti algebre di Lie nel modo seguente.

Se a è tangente all'arco $x(t) \in G$ allora $L(\Phi)a$ è definito tangente all'arco $\Phi(x(t)) \in H$. Così $L(\Phi)$ è semplicemente la derivata di Φ valutata in e . È un'applicazione lineare e si ha che

$$L(\Phi)[a, b] = [L(\Phi)a, L(\Phi)b]$$

è un'algebra di Lie.

Quindi:

1. Ogni omomorfismo locale $\Phi : G \rightarrow H$ di gruppi lineari induce un omomorfismo $L(\Phi) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tra le algebre di Lie.
2. Gruppi di Lie lineari localmente isomorfi hanno algebre di Lie isomorfe.

2.6.3 Omomorfismi analitici

Ogni omomorfismo analitico di gruppi di Lie $\Phi : G \rightarrow H$ induce un corrispondente omomorfismo algebrico di Lie:

$$L(\Phi) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$$

È chiaro che $L(\Phi \circ \Psi) = L(\Phi) \circ L(\Psi)$ per ogni composizione di omomorfismi.

1. Ogni omomorfismo locale continuo $\Phi : G \rightarrow H$ di gruppi di Lie è analitico.
2. Siano G, H gruppi di Lie e sia $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ un omomorfismo delle loro algebre. Allora esiste un unico (analitico) omomorfismo locale $\Phi : G \rightarrow H$ tale che $L(\Phi) = \tau$.
3. Due gruppi di Lie sono localmente isomorfi se e solo se le loro algebre di Lie sono isomorfe.
4. Sia \mathfrak{l} una sottoalgebra di Lie dell'algebra \mathfrak{g} . Allora esiste un unico sottogruppo connesso di Lie H di G tale che $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}$.
5. Sia $\Phi : G \rightarrow H$ un omomorfismo tra gruppi di Lie con nucleo K . Allora $L(\Phi) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ha nucleo \mathfrak{k} . Se G è connesso ed $L(\Phi)$ ha immagine $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{h}$ allora $\Phi(G)$ è il sottogruppo connesso di Lie di H con algebra \mathfrak{l} .
6. Se un gruppo di Lie G è abeliano, allora la sua algebra \mathfrak{g} è abeliana.
7. Sia G un gruppo connesso abeliano di Lie. Allora $G \simeq \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \mathrm{U}(1) \times \cdots \times \mathrm{U}(1)$, con p fattori \mathbb{R} e q fattori $\mathrm{U}(1)$, per qualche $p \geq 0$, $q \geq 0$.

Capitolo 3

Il teorema di Wigner

Gli invarianti, in fisica, giocano un ruolo importante, essendo quelle quantità che, in qualsiasi sistema di riferimento le si osservi, restano invariate. Con l'avvento della fisica quantistica, crebbe anche la loro importanza, in particolare nella formulazione di una teoria di campo quantistica relativistica. In quest'ambito, uno degli strumenti più importanti nello studio degli invarianti è il teorema enunciato da Eugene Paul Wigner su *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* (1931), che, come molte opere del fisico-matematico ungherese, è di basilare importanza per tutto lo sviluppo della teoria quantistica¹.

Wigner, in particolare, si interessò della determinazione delle proprietà delle trasformazioni che conservano la probabilità di transizione tra due stati quantistici differenti. Wigner, infatti, posta $\bar{\phi}$ la funzione d'onda per il secondo osservatore, laddove il primo osserva ϕ , assume che l'uguaglianza

$$|\langle \psi | \phi \rangle| = |\langle \bar{\psi} | \bar{\phi} \rangle| \quad (3.1)$$

deve valere per tutte le funzioni ψ , ϕ . Alla fine, non considerando le trasformazioni che implicano una inversione temporale, si trova che l'operatore O_R , tale che $\bar{\phi} = O_R \phi$, deve essere **unitario** e quindi **lineare**. Si dimostrò successivamente che considerando tutte le possibilità, l'operatore può anche essere **antiunitario** ed **antilineare**. Conseguenza di questo fatto è che entrambe le descrizioni dei due osservatori sono, dal punto di vista fisico, assolutamente equivalenti. In pratica, come detto, laddove il primo osserva ϕ , il secondo osserverà $\bar{\phi}$, mentre l'operatore H del primo sarà, per il secondo $O_R H O_R^{-1}$. Evidentemente tutto ciò coinvolge il concetto di **trasformazione di simmetria**, ovvero una trasformazione delle coordinate di un certo sistema fisico

¹A conferma di ciò, vedere *Relativistic Invariance and Quantum Mechanics*, note di A.Barut su lezioni di A.S.Wightman, Supplemento al Nuovo Cimento XIV, n.1, pag.1513, 1959

nelle coordinate in un altro sistema di riferimento.

Pertanto nel corso di questo capitolo si definiranno i raggi di vettori, dandone le loro proprietà [13, 12], quindi si darà una definizione di trasformazione di simmetria [41]. Infine, fornito un enunciato del teorema di Wigner [41], si procederà nella dimostrazione [13].

3.1 I raggi di vettori

Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert complesso con vettori ψ, φ, \dots . Il prodotto interno $\langle \psi | \varphi \rangle$ di due vettori ψ, φ ha simmetria hermitiana, cioè

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle^*$$

Per *raggio*, o più precisamente *raggio di vettori*, si definisce l'insieme di tutti i vettori della forma $\tau\psi_0$, dove ψ_0 è un vettore fissato in \mathcal{H} e τ uno scalare di modulo 1. Se ψ_0 è un vettore unitario, anche il raggio \mathcal{R}_{ψ_0} si dirà unitario. Poiché gli stati quantistici sono, però, descritti da raggi unitari ψ in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , da ora in poi si farà riferimento ai raggi come raggi unitari.

Definizione 3.1.

Si definisce *raggio di vettori* ψ nello spazio di Hilbert \mathcal{H} un insieme siffatto:

$$\mathcal{R}_{\psi_0} = \{ |\psi\rangle \text{ t.c. } |\psi\rangle = \tau |\psi_0\rangle, |\tau| = 1 \} \quad (3.2)$$

Poiché esiste una corrispondenza 1-a-1 tra gli stati quantistici ed i raggi di vettori, si parlerà di probabilità di transizione, o più genericamente di probabilità tra raggi in luogo di quella tra stati quantistici.

Prendendo, quindi, un qualsiasi raggio \mathcal{R}_{ψ} , un vettore $|\psi\rangle$ in esso contenuto sarà detto *rappresentante* del raggio \mathcal{R}_{ψ} . La probabilità di transizione da uno stato \mathcal{R}_{ψ} ad uno \mathcal{R}_{φ} equivale a $|\langle \psi | \varphi \rangle|^2$, dove $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ sono rappresentanti rispettivamente di \mathcal{R}_{ψ} e \mathcal{R}_{φ} . Ciò suggerisce la seguente definizione per il prodotto interno tra due raggi:

$$\mathcal{R}_{\psi} \cdot \mathcal{R}_{\varphi} = |\langle \psi | \varphi \rangle|, \quad \text{con } |\psi\rangle \in \mathcal{R}_{\psi}, |\varphi\rangle \in \mathcal{R}_{\varphi} \quad (3.3)$$

che è indipendente dalla scelta di $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$. Un raggio \mathcal{R}_{ψ} , infatti, è unicamente determinato da uno dei suoi rappresentanti. Inoltre, la *norma del raggio* \mathcal{R}_{ψ} è:

$$|\mathcal{R}_{\psi}| = (\mathcal{R}_{\psi} \cdot \mathcal{R}_{\psi})^{\frac{1}{2}} = \| |\psi\rangle \|$$

Mentre si definisce *distanza tra raggi* l'espressione:

$$d(\mathcal{R}_\psi \cdot \mathcal{R}_\varphi) = \sqrt{2(1 - \mathcal{R}_\psi \cdot \mathcal{R}_\varphi)} \quad (3.4)$$

Si osservi che

$$1 - (\mathcal{R}_\psi \cdot \mathcal{R}_\varphi)^2 = d^2 \left(1 - \frac{1}{4}d^2\right) \leq d^2$$

dove $d = d(\mathcal{R}_\psi \cdot \mathcal{R}_\varphi)$.

Lemma 3.1.

Il prodotto $\mathcal{R}_\psi \cdot \mathcal{R}_\varphi$ è continuo in entrambi i fattori rispetto alla metrica $d(\mathcal{R}_\psi \cdot \mathcal{R}_\varphi)$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{R}_\varphi, \mathcal{R}_{\psi_1}, \mathcal{R}_{\psi_2}$ tre raggi con rappresentanti rispettivamente φ, ψ_1, ψ_2 , tali che ψ_1 e ψ_2 sono alla minima distanza. Allora

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_\varphi \cdot \mathcal{R}_{\psi_1} - \mathcal{R}_\varphi \cdot \mathcal{R}_{\psi_2}| &= \left| |\langle \varphi | \psi_1 \rangle| - |\langle \varphi | \psi_2 \rangle| \right| \leq |\langle \varphi | \psi_1 \rangle - \langle \varphi | \psi_2 \rangle| \\ &= |\langle \varphi | \psi_1 - \psi_2 \rangle| \leq \|\psi_1 - \psi_2\| = d(\mathcal{R}_{\psi_1}, \mathcal{R}_{\psi_2}) \end{aligned}$$

Con il medesimo ragionamento si può mostrare che:

$$|\mathcal{R}_{\psi_1} \cdot \mathcal{R}_{\varphi_1} - \mathcal{R}_{\psi_2} \cdot \mathcal{R}_{\varphi_2}| \leq d(\mathcal{R}_{\psi_1}, \mathcal{R}_{\psi_2}) + d(\mathcal{R}_{\varphi_1}, \mathcal{R}_{\varphi_2})$$

Per scalari reali non-negativi ρ si definisce

$$\mathcal{R}_{\rho\psi} = \{\rho|\psi\rangle\}, \text{ con } |\psi\rangle \in \mathcal{R}_\psi$$

cioé, se $|\psi_0\rangle \in \mathcal{R}_\psi$, gli elementi $|\varphi\rangle$ di $\mathcal{R}_{\rho\psi}$ sono dati da $|\varphi\rangle = \tau|\psi_0\rangle$, con $|\tau| = \rho$. Chiaramente

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{R}_{\rho\psi}) &= \mathcal{R}_{(\rho\sigma)\psi}, \quad |\mathcal{R}_{\rho\psi}| = \rho|\mathcal{R}_\psi| \\ \mathcal{R}_{\rho\psi} \cdot \mathcal{R}_{\sigma\varphi} &= \rho\sigma(\mathcal{R}_\psi \cdot \mathcal{R}_\varphi) \end{aligned}$$

In generale, poi, ogni raggio \mathcal{R}_ψ può essere espresso nella forma:

$$\mathcal{R}_\psi = \rho\mathcal{R}_e, \quad \text{con } |\mathcal{R}_e| = 1, \quad \rho \geq 0 \quad (3.5)$$

In ogni caso $\rho = |\mathcal{R}_\psi|$. Se $\mathcal{R}_\psi = \mathcal{R}_0$, con \mathcal{R}_0 il raggio del vettore nullo, allora $\rho = 0$, e il raggio \mathcal{R}_e può essere scelto arbitrariamente; se $\mathcal{R}_\psi \neq \mathcal{R}_0$, \mathcal{R}_e è unicamente determinato come $\rho^{-1}\mathcal{R}_\psi$.

Inoltre due raggi si dicono indipendenti se i rispettivi rappresentanti sono linearmente indipendenti. Allo stesso modo sono ortogonali se lo sono tra loro i rappresentanti scelti. Ovviamente tali definizioni sono indipendenti dalla scelta dei rappresentanti e possono essere riassunte nel seguente lemma:

Lemma 3.2.

$n+1$ raggi $\mathcal{R}_{\psi_1}, \dots, \mathcal{R}_{\psi_n}, \mathcal{R}_{\psi_{n+1}}$ sono indipendenti se i primi n raggi $\mathcal{R}_{\psi_1}, \dots, \mathcal{R}_{\psi_n}$ sono indipendenti e se esiste un raggio \mathcal{R}_φ che è ortogonale ai primi n e non ortogonale ad $\mathcal{R}_{\psi_{n+1}}$.

3.2 Trasformazioni di simmetria

Siano \mathcal{R} l'insieme dei raggi, $\Pi(\mathcal{H})$ l'insieme dei proiettori definiti sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} . Introduciamo con un esempio il concetto di simmetria quantistica. Consideriamo una particella localizzabile nello spazio tridimensionale e sia Δ una porzione dello spazio. Si definirà l'osservabile E come quell'osservabile il cui risultato r è dato da

$$r = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in \Delta \\ 0 & \text{se } a \notin \Delta \end{cases} \quad (3.6)$$

dove a è il risultato della misurazione della posizione. Un'osservabile di tal genere, che indica l'appartenenza o meno del punto a alla porzione di spazio Δ , viene detta *osservabile* $1 - 0$, poiché può assumere solo i due valori 1 o 0, e pertanto E è un proiettore di \mathcal{H} .

Siano, ora, Σ e Σ' due differenti sistemi di riferimento. La probabilità che una particella il cui stato è rappresentato dal raggio \mathcal{R}_ψ si trovi nella porzione di spazio Δ del sistema di riferimento Σ è pari a $P(E, \mathcal{R}_\psi)$, mentre nel sistema di riferimento Σ' , sempre per la stessa porzione di spazio, questa volta indicata come Δ' , la probabilità sarà $P(E', \mathcal{R}'_\psi)$, dove \mathcal{R}'_ψ , E' sono, rispettivamente, il raggio che rappresenta l'osservabile ed il proiettore nel sistema di coordinate Σ' . Poiché la presenza del sistema nella porzione di spazio Δ in Σ (Δ' in Σ') non dipende dal sistema di riferimento in cui la si misura, le due probabilità devono essere uguali:

$$P(E, \mathcal{R}_\psi) = P(E', \mathcal{R}'_\psi)$$

Tale relazione può essere scritta come:

$$\langle \psi | E \psi \rangle = \langle \psi' | E' \psi' \rangle \quad (3.7)$$

Allora devono esistere due trasformazioni biunivoche $T_1 : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $T_2 : \Pi(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi(\mathcal{H})$ tali che $\mathcal{R}'_\psi = T_1 \mathcal{R}_\psi$, $E' = T_2 E$. Pertanto, è naturale definire *simmetria quantistica* una coppia di trasformazioni biettive

$$\begin{aligned} T_1 : \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{R} \\ T_2 : \Pi(\mathcal{H}) &\rightarrow \Pi(\mathcal{H}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

tali che

$$\langle \psi | E | \psi \rangle = \langle \psi' | T_2 E | \psi' \rangle \quad \forall \psi' \in T_1 \mathcal{R}_\psi$$

Si può vedere che T_1 è determinata da T_2 .

Infatti, siano $E = |\psi\rangle\langle\psi|$, $E' = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. Allora

$$\begin{aligned} \langle \psi | E | \psi \rangle &= |\langle \psi | \psi \rangle|^2 = 1 \\ &= \langle \psi' | E' | \psi' \rangle = |\langle \psi' | \varphi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Ma $|\langle \psi' | \varphi \rangle| = 1$ implica, per il teorema di Schwartz, che $\varphi = e^{i\alpha} \psi'$, cioè $E' = |\varphi\rangle\langle\varphi| = |\psi'\rangle\langle\psi'|$. Quindi con la stessa trasformazione si possono trasformare sia i raggi, sia i proiettori.

A questo punto siamo pronti a dare una definizione formale di *trasformazione di simmetria*, ovvero una trasformazione attraverso la quale siamo in grado di passare da un sistema di riferimento Σ ad uno differente Σ' :

Definizione 3.2.

Una trasformazione di simmetria T è una corrispondenza tra raggi unitari $\mathcal{R}_{e_1}, \mathcal{R}_{e_2}, \dots$ dello spazio complesso di Hilbert \mathcal{H} ed i raggi unitari $\mathcal{R}_{e'_1}, \mathcal{R}_{e'_2}, \dots$ dello spazio complesso di Hilbert \mathcal{H}' che soddisfa ad alcune proprietà:

1. T è definita per ogni raggio unitario \mathcal{R}_e in \mathcal{H} , e $\mathcal{R}_{e'} = T\mathcal{R}_e$ è un raggio unitario in \mathcal{H}' ;
2. $T\mathcal{R}_{e_1} \cdot T\mathcal{R}_{e_2} = \mathcal{R}_{e_1} \cdot \mathcal{R}_{e_2}$, ovvero la conservazione della probabilità, condizione equivalente a dire che la mappatura di \mathcal{H} su \mathcal{H}' deve essere uno a uno.

La seconda condizione può, più correttamente, essere scritta come

$$|\langle e_1 | e_2 \rangle|^2 = |\langle e'_1 | e'_2 \rangle|^2 \quad (3.9)$$

dove $e'_i = Te_i$.

Inoltre il seguente lemma, sulla conservazione dell'ortonormalità, può essere considerato come una proprietà aggiuntiva della trasformazione:

Lemma 3.3.

Un sistema ortonormale completo $\{|\psi_k\rangle\}$ in \mathcal{H} verrà trasformato in un sistema ortonormale completo $|\psi'_k\rangle$ in \mathcal{H}' .

Dimostrazione. Sia $\{\mathcal{R}_{\psi_r}\}$ un insieme completo di raggi ortonormali, tali che, $\forall \psi_k \in \mathcal{R}_{\psi_k}, \langle \psi_k | \psi_l \rangle = \delta_{kl}$. Un qualsiasi vettore $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$, $\| |\varphi\rangle \| = 1$, sarà:

$$|\varphi\rangle = \sum_k \alpha_k |\psi_k\rangle, \quad \text{con } \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Siano, quindi, $|\varphi'\rangle \in T\mathcal{R}_{\varphi}, |\psi'_k\rangle \in T\mathcal{R}_{\psi_k}$, con T trasformazione di simmetria che preserva la probabilità.

Sviluppiamo la seguente norma:

$$\begin{aligned} & \| |\varphi'\rangle - \sum_k |\psi'_k\rangle \langle \psi'_k | \varphi'\rangle \|^2 = \\ & = \| |\varphi'\rangle \|^2 + \left\| \sum_k |\psi'_k\rangle \langle \psi'_k | \varphi'\rangle \right\|^2 - 2 \sum_k |\langle \psi'_k | \varphi'\rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sviluppiamo il secondo termine a destra dell'uguaglianza:

$$\begin{aligned}
\| \sum_k |\psi'_k\rangle \langle \psi'_k | \varphi' \rangle \|^2 &= \\
&= \left\langle \left(\sum_k |\psi'_k\rangle \langle \psi'_k | \varphi' \rangle \right) \middle| \left(\sum_l |\psi'_l\rangle \langle \psi'_l | \varphi' \rangle \right) \right\rangle = \\
&= \sum_{kl} \langle \psi'_k | \psi'_l \rangle \langle \psi'_k | \varphi' \rangle \langle \psi'_l | \varphi' \rangle = \\
&= \sum_{kl} \delta_{kl} \langle \psi'_k | \varphi' \rangle \langle \psi'_l | \varphi' \rangle = \sum_k |\langle \psi'_k | \varphi' \rangle|^2
\end{aligned}$$

Quindi la (3.10) diventa

$$\begin{aligned}
\| |\varphi'\rangle \|^2 - \sum_k |\langle \psi'_k | \varphi' \rangle|^2 &= \| |\varphi\rangle \|^2 - \sum_k |\langle \psi_k | \varphi \rangle|^2 \\
&= \| |\varphi\rangle - \sum_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k | \varphi \rangle \|^2 \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Quindi $\{T\mathcal{R}_{\psi_k}\} = \{\mathcal{R}_{\psi'_k}\}$ è un insieme ortonormale completo di raggi su \mathcal{H} .

3.3 Enunciato

È possibile fornire per il teorema di Wigner diversi enunciati, ognuno dei quali legato ad una differente dimostrazione² che però risultano sostanzialmente equivalenti. Il modo più semplice per descrivere ciò che stabilisce il teorema è esprimerlo nei seguenti termini [41]:

Enunciato di Weinberg

Per ogni trasformazione di simmetria invertibile $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tra raggi di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e tale da preservare la probabilità di transizione, si può definire un operatore U sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} tale che, se $|\psi\rangle \in \mathcal{R}_\psi$, allora $U|\psi\rangle \in \mathcal{R}'_\psi$, con \mathcal{R}_ψ il raggio generato dallo stato $|\psi\rangle$ ed $\mathcal{R}'_\psi = T|\psi\rangle$, con U unitario e lineare:

$$\langle U\psi | U\varphi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle, \quad U|\alpha\psi + \beta\varphi\rangle = \alpha U|\psi\rangle + \beta U|\varphi\rangle \quad (3.12)$$

oppure con U antiunitario ed antilineare:

$$\langle U\psi | U\varphi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle, \quad U|\alpha\psi + \beta\varphi\rangle = \alpha^* U|\psi\rangle + \beta^* U|\varphi\rangle \quad (3.13)$$

Inoltre U è unicamente determinato a meno di un fattore di fase.

²Per un elenco abbastanza completo delle prime dimostrazioni del teorema, vedere [12]

3.4 Dimostrazione

La dimostrazione, che segue la linea tracciata da Bargmann nel 1964 [13], viene suddivisa in vari passi: innanzitutto si sceglierà un sistema ortonormale completo di vettori in \mathcal{H} , da cui un sistema ortonormale completo in \mathcal{H}' ; quindi si dimostrerà che l'estensione lineare, oppure antilineare, della corrispondenza tra le due basi rende valida la tesi. Infine si porterà a termine la dimostrazione con l'unicità dell'operatore trovato.

3.4.1 Ortonormalità

Sia $\{|\psi_k\rangle\}$ un insieme ortonormale completo di vettori in \mathcal{H} :

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Siano $|\psi'_k\rangle \in T\mathcal{R}_{\psi_k}$. Per il Lemma 3.3, anche $\{|\psi'_k\rangle\}$ formano un insieme ortonormale completo in \mathcal{H}' :

$$\langle\psi'_i|\psi'_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

3.4.2 Proprietà di T

Sia $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ un'applicazione dei raggi unitari nello spazio di Hilbert \mathcal{H} nei raggi unitari di \mathcal{H} e tale da preservare la probabilità di transizione. Prima di determinare l'operatore U associato a tale T è necessario estenderla ad un'applicazione di tutti i raggi \mathcal{R} in \mathcal{H} in tutti i raggi \mathcal{R}' in \mathcal{H}^3 .

$$T\mathcal{R}_{\rho e} = \rho T\mathcal{R}_e \quad \text{con } \rho \geq 0, |\mathcal{R}_e| = 1 \quad (3.14)$$

Si noti che la (3.14) non presenta alcuna ambiguità per ogni raggio $\mathcal{R}_\psi = \rho\mathcal{R}_e$: infatti se $\mathcal{R}_\psi = \mathcal{R}_0$, allora $\rho = 0$, quindi $T\mathcal{R}_0 = |0\rangle$. Se $\mathcal{R}_\psi \neq \mathcal{R}_0$, sia ρ sia \mathcal{R}_e sono unicamente determinati.

³Già Wigner si pose il problema: infatti la (3.1) è verificata innanzitutto per stati fisici, ovvero ortonormali. Wigner, però, mostra la validità dell'equazione introducendo le costanti c_ψ, c_φ , dimostrando la validità di

$$|\langle O_R \psi | O_R \varphi \rangle| = |\langle \psi | \varphi \rangle|$$

ed anche di

$$\begin{aligned} \langle O_R \psi | O_R \phi \rangle &= \langle \psi | \phi \rangle \\ O_R | a\psi + b\varphi \rangle &= a O_R | \psi \rangle + b O_R | \varphi \rangle \end{aligned}$$

per ogni $c_\psi | \psi \rangle, c_\varphi | \varphi \rangle$, dove a, b costanti arbitrarie (vedi [9], Appendice al Capitolo 20).

A questo punto, per un'applicazione così estesa, valgono le seguenti proprietà:

$$T\mathcal{R}_{\sigma\psi} = \sigma T\mathcal{R}_{\psi} \quad (3.15a)$$

$$T\mathcal{R}_{\psi_1} \cdot T\mathcal{R}_{\psi_2} = \mathcal{R}_{\psi_1} \cdot \mathcal{R}_{\psi_2} \quad (3.15b)$$

$$|T\mathcal{R}_{\psi}| = |\mathcal{R}_{\psi}| \quad (3.15c)$$

Data l'applicazione T , si costruirà U compatibilmente ad essa a partire dalla relazione

$$U|\psi\rangle \in T\mathcal{R}_{\psi} \quad \text{se } \psi \in \mathcal{R}_{\psi} \quad (3.16)$$

con U tale che $U|\psi\rangle = |\psi'\rangle \in \mathcal{H}$. Se nel corso della costruzione U è stata definita, in accordo con la (3.16), per tutti i multipli $\lambda|\psi\rangle$ del vettore $|\psi\rangle \neq |0\rangle$, allora dalle (3.15)

$$\|U|\psi\rangle\| = \|\psi\rangle\|, \quad U(\lambda|\psi\rangle) = \chi_{\psi}(\lambda)U|\psi\rangle \quad (3.17a)$$

con

$$\chi_{\psi}(1) = 1, \quad |\chi_{\psi}(\lambda)| = |\lambda| \quad (3.17b)$$

dove $\chi_{\psi}(\lambda)$ è una funzione di $|\psi\rangle$ e λ unicamente definita. Se, infine, U è stato definito per ogni coppia di vettori $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ in \mathcal{H} , allora

$$|\langle U\psi|U\varphi\rangle| = |\langle\psi|\varphi\rangle| \quad (3.17c)$$

3.4.3 Costruzione parziale di U

Si fissa un raggio \mathcal{R}_e in \mathcal{H} ; sia $\mathcal{R}_{e'} = T\mathcal{R}_e$, tale che $|\mathcal{R}_{e'}| = 1$. Si selezionano i vettori $|e\rangle \in \mathcal{R}_e, |e'\rangle \in \mathcal{R}_{e'}$ e si definisce

$$U|e\rangle = |e'\rangle \quad (3.18)$$

in accordo con la (3.16).

Indicato con \mathcal{P} l'insieme dei vettori ortogonali ad $|e\rangle$, e con \mathcal{P}' l'insieme dei vettori ortogonali ad $|e'\rangle$, ogni vettore $|\psi\rangle$ in \mathcal{H} avrà un'unica decomposizione:

$$|\psi\rangle = \alpha|e\rangle + |\varphi\rangle, \quad \text{con } |\varphi\rangle \in \mathcal{P}$$

cioé $\alpha = \langle e|\psi\rangle, |\varphi\rangle = |\psi\rangle - |e\rangle\langle e|\psi\rangle$.

Si fissa $\alpha = 1, 0$. Sia $|\psi\rangle = |e\rangle + |\varphi\rangle$, con $|\varphi\rangle \in \mathcal{P}$ e $|\varphi\rangle \neq |0\rangle$, e si pone

$$|f\rangle = \frac{|\varphi\rangle}{\| |\varphi\rangle \|}$$

Siano, quindi, \mathcal{R}_ψ , \mathcal{R}_f , \mathcal{R}_φ i raggi corrispondenti, così che

$$\mathcal{R}_\varphi = \mathcal{R}_f \| |\varphi\rangle \|, \quad |\mathcal{R}_f| = 1$$

Se $|e'\rangle \in T\mathcal{R}_e$, ed $|f'\rangle \in \mathcal{R}_{f'} = T\mathcal{R}_f$, allora $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle = \alpha'_0|e'\rangle + \alpha'_1|f'\rangle$, dove $|\alpha'_0| = 1$, $|\alpha'_1| = \| |\varphi\rangle \|^4$. Quindi $T\mathcal{R}_\psi$ contiene un vettore $|\psi''\rangle = \alpha'^{-1}_0|\psi'\rangle$, unicamente determinato, della forma $|e'\rangle + \beta'|f'\rangle$, con $|\beta'| = \| |\varphi\rangle \|$. Ponendo $\beta'|f'\rangle = V|\varphi\rangle$, si definisce:

$$U(|e\rangle + |\varphi\rangle) = |e'\rangle + V|\varphi\rangle, \quad \text{con } |\varphi\rangle \in \mathcal{P}, V|\varphi\rangle \in \mathcal{P}' \quad (3.19)$$

Chiaramente $V|\varphi\rangle = \beta'|f'\rangle \in T\mathcal{R}_{\| |\varphi\rangle \| |f\rangle} = T\mathcal{R}_\varphi$, e si trova⁵:

$$U|\varphi\rangle = V|\varphi\rangle, \quad \text{con } |\varphi\rangle \in \mathcal{P} \quad (3.20)$$

Se $|\varphi\rangle = |0\rangle$, si pone $V|\varphi\rangle = |0\rangle$, così che la (3.19) si riduce alla (3.18).

3.4.4 Analisi di V

In questa sezione si analizzano in maniera dettagliata le proprietà dell'applicazione $V : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$.

La parte reale di $\langle V\Psi | V\Phi \rangle$

Siano $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle \in \mathcal{P}$, ovvero siano $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$ vettori perpendicolari ad $|e\rangle$. Dalle (3.19), (3.20), (3.17c), segue che

$$|\langle V\Psi | V\Phi \rangle|^2 = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2 \quad (3.21)$$

Dalla (3.21) segue che $|\langle e' + V\Psi | e' + V\Phi \rangle|^2 = |\langle e + \Psi | e + \Phi \rangle|^2$, e svolgendo il prodotto si ottiene $|1 + \langle V\Psi | V\Phi \rangle|^2 = |1 + \langle \Psi | \Phi \rangle|^2$. Poiché per ogni numero complesso ζ , $|1 + \zeta|^2 = 1 + |\zeta|^2 + 2\text{Re}\zeta$, segue dalla (3.21) che

$$\text{Re}\langle V\Psi | V\Phi \rangle = \text{Re}\langle \Psi | \Phi \rangle \quad (3.22a)$$

$$\langle V\Psi | V\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle \quad \text{se } \langle \Psi | \Phi \rangle \text{ reale} \quad (3.22b)$$

dove Re indica la *parte reale*.

Dati due vettori non nulli $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ in \mathcal{P} , valgono le seguenti relazioni:

- a. $V(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = V|\psi_1\rangle + V|\psi_2\rangle$;
- b. $\chi_{\psi_1}(\lambda) = \chi_{\psi_2}(\lambda)$, (vedi (3.17b));

⁴ $|e\rangle$ ed $|f\rangle$ sono ortonormali, e per il Lemma 3.3, anche $|e'\rangle$ ed $|f'\rangle$.

⁵ $V|\varphi\rangle = U(|e\rangle + |\varphi\rangle) - |e'\rangle = U(|e\rangle + |\varphi\rangle) - U|e\rangle = U|\varphi\rangle$

$$c. \langle V\psi_1 | V\psi_2 \rangle = \chi(\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle).$$

Si pone

$$|f_1\rangle = \frac{|\psi_1\rangle}{\| |\psi_1\rangle \|}$$

Se $\dim \mathcal{H} = 2$, tutti i vettori in \mathcal{P} sono multipli di $|f_1\rangle$, quindi

$$|\psi_1\rangle = \rho |f_1\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \sigma |f_1\rangle \quad (3.23a)$$

Se $\dim \mathcal{H} \geq 3$, si sceglie un secondo vettore unitari $|f_2\rangle$ in \mathcal{P} , *ortogonale* ad $|f_1\rangle$, tale che:

$$|\psi_1\rangle = \rho |f_1\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \sigma |f_1\rangle + \tau |f_2\rangle \quad (3.23b)$$

In entrambi i casi sia \mathcal{L} l'insieme delle combinazioni lineari degli m vettori ortonormali $|f_i\rangle$ ($m = 1$ o $m = 2$).

Le funzioni $\chi_r(\alpha)$

Si pone $\mathcal{R}_{f_r} = \{|f_r\rangle\}$. Allora $|f'_r\rangle = V|f_r\rangle \in T\mathcal{R}_{f_r}$, ed i vettori $\{|f'_r\rangle\}$ sono ortonormali. Dalla (3.17a), segue che

$$V(\alpha |f_r\rangle) = \chi_r(\alpha) |f'_r\rangle, \quad |\chi_r(\alpha)| = |\alpha| \quad (3.24)$$

Applicando le (3.22) ad $\alpha |f_r\rangle$ e a $\beta |f_r\rangle$ si ottiene:

$$\operatorname{Re}(\chi_r(\alpha)^* \chi_r(\beta)) = \operatorname{Re}(\alpha^* \beta) \quad (3.25a)$$

Posto $\alpha = 1$, poiché $\chi_r(1) = 1$, si conclude che

$$\operatorname{Re} \chi_r(\beta) = \operatorname{Re} \beta \quad (3.25b)$$

$$\chi_r(\beta) = \beta \quad \text{per } \beta \text{ reale} \quad (3.25c)$$

Sia, poi, $|\Phi\rangle = \sum_r \alpha_r |f_r\rangle$. Quindi, per il Lemma 3.3, $V|\Phi\rangle = \sum_r \alpha'_r |f'_r\rangle$, $|\alpha'_r| = |\alpha_r|$.

- Si dimostra innanzitutto che $\alpha'_r = \chi_r(\alpha_r)$.
È ovvio per $\alpha_r = 0$. Se $\alpha_r \neq 0$, posto $\gamma_r = \alpha_r^{*-1}$, allora $\langle \gamma_r f_r | \alpha_r f_r \rangle = \langle \gamma_r f_r | \Phi \rangle$. Quindi, dalle (3.22), $\chi_r(\gamma_r)^* \chi_r(\alpha_r) = \chi_r(\gamma_r)^* \alpha'_r = 1$, cioè $\alpha'_r = \chi_r(\alpha_r)$.
- Si mostra, ora, che, per $m = 2$, $\chi_2(\alpha) = \chi_1(\alpha)$.
Sia $|\Psi\rangle = \sum_r |f_r\rangle$. Allora $V|\Psi\rangle = \sum_r |f'_r\rangle$, e $V(\alpha |\Psi\rangle) = \sum_r \chi_r(\alpha) |f'_r\rangle = \chi_\Psi(\alpha) V|\Psi\rangle$, dalla (3.17a). Quindi $\chi_1(\alpha) = \chi_2(\alpha) = \chi_\Psi(\alpha)$.

Da ciò segue che:

$$V \left(\sum_r \alpha_r |f_r\rangle \right) = \sum_r \chi_1(\alpha_r) |f'_r\rangle \quad (3.26)$$

Determinazione di $\chi_1(\beta)$

(1) Si pone $\beta = i$. Allora $|\chi_1(i)| = 1$, $\text{Re } \chi_1(i) = 0$; così $\chi_1(i) = \eta i$, $\eta = 1$ o $\eta = -1$.

(2) Per ogni complesso ζ , $\text{Im } \zeta = \text{Re}(i^*\zeta)$. Quindi, dalla (3.25a), segue che

$$\text{Im } \chi_1(\beta) = \text{Re}(i^*\chi_1(\beta)) = \eta \text{Re}(\chi_1(i)^*\chi_1(\beta)) = \eta \text{Re}(i^*\beta) = \eta \text{Im } \beta$$

dove Im indica la parte immaginaria. Combinando quest'ultimo risultato con la (3.25b), si ottiene:

$$\chi_1(\beta) = \beta \text{ se } \eta = 1, \quad \chi_1(\beta) = \beta^* \text{ se } \eta = -1 \quad (3.27)$$

Le proprietà di $\chi_1(\beta)$ sono quindi:

$$\chi_1(\alpha + \beta) = \chi_1(\alpha) + \chi_1(\beta) \quad (3.28a)$$

$$\chi_1(\alpha\beta) = \chi_1(\alpha)\chi_1(\beta) \quad (3.28b)$$

$$\chi_1(\alpha)^* = \chi_1(\alpha^*) \quad (3.28c)$$

La struttura di V

Siano $|\Psi\rangle = \sum_r \alpha_r |f_r\rangle$ e $|\Phi\rangle = \sum_r \beta_r |f_r\rangle$ due vettori in \mathcal{L} , l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\{|f_k\rangle\}$. Dalla (3.26) e dalle proprietà di χ_1 si possono trarre le seguenti conclusioni:

- dalla (3.28a), $V(|\Psi\rangle + |\Phi\rangle) = V|\Psi\rangle + V|\Phi\rangle$;
- dalla (3.28b), $V(\lambda|\Phi\rangle) = \chi_1(\lambda)V|\Phi\rangle$.

Poiché $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ appartengono entrambi ad \mathcal{L} (vedi le (3.23)), ciò dimostra le asserzioni a. e b., con $\chi_{\psi_1}(\lambda) = \chi_{\psi_2}(\lambda) = \chi(\lambda)$. Per dimostrare la c., si nota che, dalle (3.23), $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \rho^*\sigma$, e che $\langle V\psi_1|V\psi_2\rangle = \chi_1(\rho)^*\chi_1(\sigma) = \chi_1(\rho^*)\chi_1(\sigma) = \chi_1(\rho^*\sigma)$, come volevasi dimostrare.

A questo punto, poiché dalla b., per ogni $|\psi_2\rangle$ non nullo in \mathcal{P} , $\chi_{\psi_1}(\lambda) = \chi_{\psi_2}(\lambda) = \chi(\lambda)$, si può concludere che l'applicazione V possiede le seguenti proprietà:

$$V(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = V|\psi_1\rangle + V|\psi_2\rangle \quad (3.29a)$$

$$V(\lambda|\psi_1\rangle) = \chi(\lambda)V|\psi_1\rangle \quad (3.29b)$$

$$\langle V\psi_1|V\psi_2\rangle = \chi(\langle\psi_1|\psi_2\rangle) \quad (3.29c)$$

dove χ è una delle funzioni nella (3.27).

3.4.5 Conclusione nella costruzione di U

A questo punto resta da definire U per i vettori del tipo $|\psi\rangle = \alpha|e\rangle + |\varphi\rangle$, con $|\varphi\rangle \in \mathcal{P}$ e per gli $\alpha \neq 0, 1$.

Si pone $|\psi_1\rangle = |e\rangle + \alpha^{-1}|\varphi\rangle$, così che $|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle$, e $T\mathcal{R}_\psi = |\alpha|T\mathcal{R}_{\psi_1}$, se $\mathcal{R}_\psi, \mathcal{R}_{\psi_1}$ sono i raggi corrispondenti. $U|\psi_1\rangle \in T\mathcal{R}_{\psi_1}$ è definito dalla (3.19). Quindi $\chi(\alpha)U|\psi_1\rangle \in T\mathcal{R}_\psi$ ⁶, e si può quindi definire $U|\psi\rangle = \chi(\alpha)(|e'\rangle + V(\alpha^{-1}|\varphi\rangle))$, o, dalle (3.29)

$$U(\alpha|e\rangle + |\varphi\rangle) = \chi(\alpha)|e'\rangle + V|\varphi\rangle, \quad \text{con } |\varphi\rangle \in \mathcal{P} \quad (3.30)$$

Se $\alpha = 1$ o 0 , la (3.30) coincide con (3.18), (3.19) o (3.20). Così l'applicazione U è definita per tutti i vettori $|\psi\rangle$ in \mathcal{H} .

Dall'efficacia delle (3.29) è un'immediata conseguenza della (3.30) che U soddisfa alle seguenti condizioni

$$U(|\psi\rangle + |\phi\rangle) = U|\psi\rangle + U|\phi\rangle \quad (3.31a)$$

$$U(\lambda|\psi\rangle) = \chi(\lambda)U|\psi\rangle \quad (3.31b)$$

$$|\langle U\psi|U\phi\rangle| = |\langle\psi|\phi\rangle| \quad (3.31c)$$

A questo punto restano da determinare le condizioni per cui U è unitario o antiunitario.

Se T è un'applicazione di tutti i raggi di \mathcal{H} nei raggi di \mathcal{H} , U è un operatore su \mathcal{H} unitario se $\chi(\lambda) = \lambda$, antiunitario se $\chi(\lambda) = \lambda^*$.

Caso monodimensionale

\mathcal{H} contiene un solo raggio unitario \mathcal{R}_e e così T è completamente determinata da $T\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_{e'}$. Siano $|e\rangle \in \mathcal{R}_e, |e'\rangle \in \mathcal{R}_{e'}$. I due vettori immagine $U_1(\alpha|e\rangle) = \alpha|e'\rangle$ e $U_2(\alpha|e\rangle) = \alpha^*|e'\rangle$ sono compatibili con T . Il primo è lineare, il secondo antilineare.

Caso bidimensionale

Se $\dim \mathcal{H} \geq 2$, il carattere lineare o antilineare di U può essere espresso in termini di T . Descrive, quindi, una proprietà *intrinseca* dell'applicazione T ed è indipendente dalla scelta di U .

Si considerano tre raggi \mathcal{R}_{ψ_i} e sia $|\psi_i\rangle \in \mathcal{R}_{\psi_i}$. L'espressione

$$\Delta(\mathcal{R}_{\psi_1}, \mathcal{R}_{\psi_2}, \mathcal{R}_{\psi_3}) = \langle\psi_1|\psi_2\rangle \langle\psi_2|\psi_3\rangle \langle\psi_3|\psi_1\rangle$$

⁶Dire $\chi(\alpha)U|\psi\rangle \in T\mathcal{R}_\psi$ è equivalente a scrivere $\chi(\alpha)U|\psi_1\rangle = \tau U|\psi\rangle$, con $|\tau| = 1$. Dalla (3.17b) segue che $|\alpha|\|\psi_1\| = \|\psi\rangle\|$, che conferma la definizione di $|\psi_1\rangle$.

è *indipendente* dalla scelta dei rappresentanti $|\psi_i\rangle$ ed è quindi una funzione dei raggi \mathcal{R}_{ψ_i} . Infatti se $|\psi_i\rangle$ viene sostituito da $|\psi'_i\rangle = \tau_i |\psi_i\rangle$, con $|\tau_i| = 1$, i fattori τ_i si cancellano in Δ . Segue dalla (3.31c) che

$$\Delta(T\mathcal{R}_{e_1}, T\mathcal{R}_{e_2}, T\mathcal{R}_{e_3}) = \chi(\Delta(\mathcal{R}_{e_1}, \mathcal{R}_{e_2}, \mathcal{R}_{e_3}))$$

Come si è visto in precedenza tale criterio è inutile se $\dim \mathcal{H} = 1$, poiché $|e_i\rangle = |e\rangle$ e $\Delta = 1$. Se però $\dim \mathcal{H} \geq 2$, Δ non è sempre reale e può servire per distinguere le applicazioni lineari da quelle antilineari⁷.

3.4.6 Unicità di U

Prima di procedere con quest'ultimo passo della dimostrazione, si ricorda che:

- (i) Sia U un'applicazione vettoriale compatibile con T . Se $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ sono vettori linearmente indipendenti, allora lo sono anche $U|\psi_1\rangle, U|\psi_2\rangle$.

Dimostrazione. Due vettori $|\psi_i\rangle$ sono indipendenti se e solo se

$$G(\psi_1, \psi_2) = \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle - |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 > 0$$

Poiché, dalla (3.17c), G non viene modificato da U , l'assunto risulta verificata.

- (ii) Se U_2 ed U_1 sono compatibili con la stessa T , allora $U_2|0\rangle = U_1|0\rangle = |0\rangle$, e per ogni $|\psi\rangle \neq |0\rangle$

$$U_2|\psi\rangle = \tau(\psi)U_1|\psi\rangle, \quad \text{con } |\tau(\psi)| = 1$$

Se $\tau(\psi) = \theta$, ovvero se τ è indipendente da $|\psi\rangle$, si scrive $U_2 = \theta U_1$.

- (iii) Un'applicazione si dice *additiva* se $U(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = U|\psi_1\rangle + U|\psi_2\rangle$.

Per dimostrare l'unicità di U a meno di un fattore di fase, si procederà in 2 passi:

- 1) Se $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ sono *indipendenti*, $\tau(\psi_1) = \tau(\psi_2)$.

Si pone $|\varphi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$. Allora $U_2|\varphi\rangle = U_2|\psi_1\rangle + U_2|\psi_2\rangle$, $U_1|\varphi\rangle = U_1|\psi_1\rangle + U_1|\psi_2\rangle$ e $U_2|\varphi\rangle = \tau(\varphi)U_1|\varphi\rangle$. Quindi

$$\tau(\psi_1)U_1|\psi_1\rangle + \tau(\psi_2)U_1|\psi_2\rangle = \tau(\varphi)(U_1|\psi_1\rangle + U_1|\psi_2\rangle)$$

Poiché $U_1|\psi_1\rangle, U_1|\psi_2\rangle$ sono indipendenti, $\tau(\varphi) = \tau(\psi_1) = \tau(\psi_2)$.

⁷Siano $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ due vettori ortogonali in \mathcal{H} . Si pone $|\phi_1\rangle = |\phi\rangle$, $|\phi_2\rangle = 2^{-\frac{1}{2}}(|\phi\rangle - |\psi\rangle)$, $|\phi_3\rangle = 3^{-\frac{1}{2}}(|\phi\rangle + (1-i)|\psi\rangle)$. Allora $\| |\phi_i\rangle \| = 1$, $\Delta = \frac{i}{6}$.

2) Si fissa un vettore $|\psi_0\rangle \neq |0\rangle$ in \mathcal{H} , e si pone $\tau(\psi_0) = \theta$. Per qualunque $|\psi\rangle \neq |0\rangle$, $\tau(\psi) = \theta$.

Se $|\psi\rangle$ ed $|\psi_0\rangle$ sono indipendenti, allora, dal punto 1, segue immediatamente che $\tau(\psi) = \theta$. Se invece $|\psi\rangle = \mu|\psi_0\rangle$, con $\mu \neq 0$, si sceglie un $|\varphi\rangle$ indipendente da $|\psi_0\rangle$, e quindi da $|\psi\rangle$. Allora, sempre per il punto 1, segue che $\tau(\varphi) = \tau(\psi)$, $\tau(\psi) = \theta$.

Sia, ora, $U_2 = \theta U_1$. Se $\lambda U_1|\psi\rangle = \chi(\lambda)U_1|\psi\rangle$, allora anche $U_2(\lambda|\psi\rangle) = \chi(\lambda)U_2|\psi\rangle$. Infatti

$$U_2(\lambda|\psi\rangle) = \theta\chi(\lambda)U_1|\psi\rangle = \chi(\lambda)U_2|\psi\rangle \quad (3.32)$$

e ciò conclude la dimostrazione del Teorema di Wigner.

Capitolo 4

Rappresentazioni proiettive

Il concetto di raggio (vedi Definizione 3.1), introdotto da Weyl, per i vettori e gli stati fisici, può essere esteso anche agli operatori, ed in particolare a quelli unitari. Secondo il teorema di Wigner, infatti, data una trasformazione di simmetria T_r , a questa si associerà un operatore unitario (o antiunitario) unicamente determinato a meno di un fattore di fase, ovvero si associerà a T_r il raggio di operatori unitari così definito:

$$\mathcal{U}_r = \{e^{i\theta} U_r, \theta \in \mathbb{R}\} \quad (4.1)$$

Quindi, detto \mathcal{U}_e il raggio contenente l'operatore identità e detto \mathcal{U}_r^{-1} l'inverso di \mathcal{U}_r , ovvero il raggio costituito da tutti gli operatori U_r^{-1} inversi di $U_r \in \mathcal{U}_r$,

$$\mathcal{U}_r^{-1} = \{V_r, \text{ tali che } V_r = U_r^{-1}, U_r \in \mathcal{U}_r\}$$

allora $\mathcal{U}_r \cdot \mathcal{U}_r^{-1} = \mathcal{U}_r^{-1} \cdot \mathcal{U}_r = \mathcal{U}_e$.

Sia, quindi, G un gruppo di simmetria di elementi r, s, t, \dots , allora per il teorema di Wigner gli operatori unitari associati agli elementi di G risponderanno, in generale, alla seguente legge di composizione:

$$U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs}$$

che per i raggi di operatori diventa:

$$\mathcal{U}_r \cdot \mathcal{U}_s = \mathcal{U}_{rs}$$

dove $\omega(r, s)$ è un fattore di modulo 1 ($|\omega(r, s)| = 1$), mentre $r, s \in \mathcal{N}_0 \subset G$, con \mathcal{N}_0 intorno dell'identità di G .

La corrispondenza $r \rightarrow \mathcal{U}_r$ realizza una **rappresentazione proiettiva** (*ray representation* o *projective representation*) del gruppo G . Essa è equivalente ad una vera rappresentazione unitaria di G se esiste una corrispondenza

$r \rightarrow U_r \in \mathcal{U}_r$ tale che $\omega(r, s) \equiv 1, \forall r, s \in G$.

Pertanto nel corso del capitolo verranno innanzitutto forniti alcuni concetti preliminari, quali sistema di imprimitività e localizzabilità, quindi si introdurranno il generatore delle traslazioni temporali e le regole di commutazione di Weyl, con il corrispondente teorema di Von Neumann. Tutto questo servirà come base per una trattazione semi-euristica del gruppo di Galileo in 1 dimensione, utile per fornire un primo esempio di applicazione della teoria delle rappresentazioni proiettive alla fisica, motivando così l'interesse e l'importanza di tale teoria all'interno della fisica teorica. Successivamente si affronterà lo studio della teoria vera e propria [7, 42, 34, 36, 19, 25], puntando particolare attenzione sul formalismo dei fattori di fase.

4.1 Osservazioni preliminari

Prima di introdurre la teoria delle rappresentazioni proiettive, vediamo un'applicazione alla meccanica quantistica. Si richiamano, innanzitutto alcuni concetti base:

Sia \mathcal{H} lo spazio di Hilbert associato ad un dato sistema quantistico; ad una generica osservabile fisica \mathcal{A} verrà associato un operatore autoaggiunto $A : \mathcal{D}_A \rightarrow \mathcal{H}$, tale che, dato uno stato fisico rappresentato dal vettore $|\psi\rangle \in \mathcal{R}_{|\psi\rangle}$, con $\| |\psi\rangle \| = 1$, il valore di aspettazione dell'osservabile \mathcal{A} sarà dato da

$$\langle \mathcal{A} \rangle_\psi = \langle \psi | A \psi \rangle$$

Grande importanza riveste il teorema di Wigner, secondo cui, si ricorda, ad ogni operazione di simmetria nello spazio di Hilbert è associato un operatore unitario (o antiunitario) unicamente determinato a meno di un fattore di fase.

Un altro importante concetto è quello di **sistema di imprimitività**, sviluppato matematicamente da Mackey¹. Un sistema di imprimitività è la struttura matematica per la descrizione quantitativa del più elementare sistema fisico localizzabile cui si possa pensare, ad esempio una particella localizzabile in \mathbb{R} .

Si immagina, quindi, un sistema di una particella in 1 dimensione con le traslazioni come simmetrie di covarianza. Sia $E(\Delta)$ l'operatore di proiezione tale che la probabilità di trovare una particella descritta dallo stato $|\psi\rangle$

¹*Induced representations of locally compact groups I*, Annals of Mathematics vol.55, n.1, 1952; *Induced representations of locally compact groups II. The Frobenius reciprocity theorem*, Annals of Mathematics, vol.58, n.2, 1953

nell'intervallo Δ sia:

$$P(\Delta) = \langle \psi | E(\Delta) \psi \rangle$$

Sia ora G il gruppo delle traslazioni mono-dimensionali, di elementi a, b, c, \dots , (con a, b, c che indicano il passo della traslazione) e siano U_a, U_b, U_c, \dots gli operatori unitari associati ad essi dal teorema di Wigner. Allora, per l'invarianza della probabilità, segue che:

$$\langle \psi | E(\Delta) \psi \rangle = \langle \psi' | E(\Delta - a) \psi' \rangle = \langle U_a \psi | E(\Delta - a) U_a \psi \rangle$$

Da cui la definizione di **localizzabilità**: un sistema è detto localizzabile se esiste una misura a valori di proiezione $\Delta \rightarrow E(\Delta)$ per cui:

$$E(\Delta) = U_a^{-1} E(\Delta - a) U_a \quad (4.2)$$

Definizione 4.1.

Sia G un gruppo di trasformazioni, \mathcal{H} uno spazio di Hilbert complesso e separabile. Un sistema (\mathcal{H}, E, U) , dove E è una misura a valori di proiezioni $E(\Delta)$ di \mathcal{H} definita sui boreliani Δ di \mathbb{R} , ed $U : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una rappresentazione unitaria del gruppo G delle traslazioni di \mathbb{R} , in cui vale la (4.2) è detto *sistema di imprimitività* basato su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), G)$.

4.1.1 Traslazioni temporali e regole di commutazione di Weyl

Fino ad ora si sono considerati gli stati fisici $|\psi\rangle$ senza tener conto di una loro eventuale dipendenza dal tempo. Per studiarne l'evoluzione temporale si introduce il **generatore delle traslazioni temporali**, cui viene associato l'operatore unitario U_t , che ad ogni $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ associa un certo $|\psi_t\rangle$:

$$|\psi_t\rangle = U_t |\psi_0\rangle$$

che rappresenta il vettore di stato del sistema all'istante t , se all'istante t_0 il vettore di stato era $|\psi_0\rangle$.

A questo punto, fissato l'istante di tempo t_0 , si procede con lo sviluppo incrementale di $|\psi_t\rangle$ intorno a tale istante fissato, e si considera il limite

$$\frac{|\psi_{t_0+\tau}\rangle - |\psi_{t_0}\rangle}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} |\varphi\rangle_{t_0}$$

Se U_t è una rappresentazione unitaria della retta additiva dei tempi, esiste un operatore hermitiano H tale che

$$|\varphi\rangle_t = -iH |\psi_t\rangle$$

Pertanto l'equazione che regola l'evoluzione temporale del generico stato $|\psi\rangle$:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (4.3)$$

Ci si chiede, quindi, se quest'ultima equazione è equivalente all'equazione di Schrödinger: per dare una risposta a tale domanda si rimanda allo studio del più semplice gruppo di Galileo in 1 dimensione. Prima di procedere nella trattazione si introducono le **regole di commutazione di Weyl**:

La regola di commutazione canonica per P , Q , rispettivamente operatori di impulso e posizione, è ($\hbar = 1$)

$$[Q, P] = i$$

Da un calcolo formale sugli operatori, con $F(x)$ analitica ed $F'(x)$ sua derivata, segue che:

$$PF(Q) - F(Q)P = -iF'(Q)$$

e da questa, per $F(x) = e^{i\beta x}$

$$e^{-i\beta Q} P e^{i\beta Q} = P + \beta I$$

Da questa, utilizzando $F(P)$ in luogo di P , segue:

$$e^{-i\beta Q} F(P) e^{i\beta Q} = F(P + \beta I)$$

e quindi per $F(x) = e^{i\alpha x}$

$$e^{i\alpha P} e^{i\beta Q} = e^{i\alpha\beta} e^{i\beta Q} e^{i\alpha P}$$

Questa equazione è stata determinata da Weyl² e da questi proposta per sostituire la relazione di commutazione canonica.

Sotto le opportune condizioni è quindi possibile definire, a parire dagli operatori P , Q , due rappresentazioni unitarie reali ad un parametro $U(\alpha) = e^{i\alpha P}$, $V(\beta) = e^{i\beta Q}$, e che soddisfano la seguente regola moltiplicativa:

$$U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha + \beta), \quad V(\alpha)V(\beta) = V(\alpha + \beta)$$

Quindi entrambi i membri dell'equazione di Weyl

$$U(\alpha)V(\beta) = e^{i\alpha\beta} V(\beta)U(\alpha) \quad (4.4)$$

sono unitari, limitati e definiti ovunque. [2]

Quindi:

²H.Weyl, Zeitschrift für physics, **46** (1928), pag.1

Teorema 4.1.

Se la coppia P, Q di operatori autoaggiunti dello spazio di Hilbert \mathcal{H} è tale che le rappresentazioni unitarie $U(\alpha) = e^{i\alpha P}$, $V(\beta) = e^{i\beta Q}$ soddisfano alla regola di commutazione (4.4), allora P, Q sono una coppia di Schrödinger, o una somma diretta di tali coppie, con regola di commutazione $[Q, P] = i$.

Per la dimostrazione, fare riferimento a [17].

4.1.2 Il gruppo di Galileo

Uno dei sistemi fisici più semplici cui si possa pensare è un sistema localizzabile su una retta reale. Siano Σ, Σ' due sistemi di coordinate in una dimensione, dove il secondo è in moto relativo rispetto al primo, con velocità relativa v . Sia, quindi, (α, v) una generica trasformazione delle coordinate che permette di passare dal sistema Σ a quello Σ' , dove α e v sono i parametri rispettivamente della traslazione spaziale e del *boost*, indicando con $W(\alpha, v)$, in accordo con il Teorema di Wigner, l'operatore unitario che rappresenta la trasformazione: una trasformazione di tal genere appartiene al **gruppo di Galileo**, che sarà oggetto di studio più approfondito nella Sezione 5.4.

Poiché i parametri del gruppo α, v indicano rispettivamente la traslazione nello spazio e nelle velocità, la legge di composizione tra due generiche trasformazioni del gruppo di Galileo sarà di tipo abeliano, definita da:

$$(\alpha_1, v_1)(\alpha_2, v_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, v_1 + v_2)$$

Il prodotto tra i rispettivi operatori nella rappresentazione W di G risulta invece essere:

$$W(\alpha_1, v_1)W(\alpha_2, v_2) = e^{i\frac{k}{2}(\alpha_1 v_2 - \alpha_2 v_1)} W(\alpha_1 + \alpha_2, v_1 + v_2) \quad (4.5a)$$

dove k è un numero reale. La presenza del particolare fattore di fase nella (4.5a) è una conseguenza della teoria delle rappresentazioni proiettive e si vedrà in seguito come può essere derivato.

Siano, ora $U_\alpha = W(\alpha, 0)$, $G_v^{-1} = W(0, v)$. Dalla (4.5a), posto $\beta = kv$, si ricava:

$$U_\alpha G_v^{-1} = e^{i\alpha\beta} G_v^{-1} U_\alpha \quad (4.5b)$$

ovvero per U_α (di cui conosciamo il generatore) e G_v^{-1} vale la regola di commutazione di Weyl (4.4) e quindi

$$\begin{cases} U_\alpha = e^{i\alpha P} \\ G_v^{-1} = e^{ikvQ} \end{cases} \quad (4.5c)$$

Nella così detta *rappresentazione di Heisenberg* della meccanica quantistica sono gli operatori ad essere dipendenti dal tempo, e non le funzioni d'onda. In tale rappresentazione l'evoluzione temporale di un operatore è determinata dall'equazione³:

$$\frac{d}{dt}A = i[H, A] \quad (4.6)$$

Allo stesso modo, detto $\dot{Q} = \frac{d}{dt}Q = i[H, Q]$, per $\alpha = 1$, si ricava che⁴:

$$\frac{1}{k}P - \dot{Q} = u(Q) \quad (4.7a)$$

Esiste, però, un operatore S tale che $SQS^{-1} = Q$, $SPS^{-1} = \hat{P}$ e $\frac{1}{k}\hat{P} - \dot{Q} = 0$. Quindi

$$\dot{Q} = i[H, Q] = \frac{1}{k}\hat{P} \quad (4.7b)$$

e \hat{P} può essere interpretato come l'operatore quantità di moto, con k massa della particella⁵. Resta, quindi, da determinare H . Un semplice operatore che

³Sia $\langle \psi_t | A | \psi_t \rangle$ il valore di aspettazione di A nello stato $|\psi_t\rangle$ dipendente dal tempo, con $|\psi_t\rangle = |e^{iHt}\psi\rangle$. Allora:

$$\frac{d}{dt} \langle e^{-iHt}\psi | A | e^{-iHt}\psi \rangle = \langle -iH\psi_t | A | \psi_t \rangle + \langle \psi_t | A | iH\psi_t \rangle = i \langle \psi_t | (HA - AH) | \psi_t \rangle$$

da cui la (4.6).

⁴Sia $\dot{Q} = \frac{d}{dt}Q = i[H, Q]$ la derivata rispetto al tempo dell'operatore di posizione Q , e sia $\hat{Q} \rightarrow \hat{Q} + v$ la trasformazione di tale operatore sotto l'azione della generica trasformazione di Galileo (α, v) . Allora la rappresentazione unitaria ad un parametro G_v^{-1} trasformerà \hat{Q} come segue

$$G_v \hat{Q} G_v^{-1} = \hat{Q} + v \quad (4.1.2.A)$$

Nella (4.5b) si pone $\alpha = 1$, trovando:

$$G_v e^{iP} G_v^{-1} = e^{ikv} e^{iP}$$

e da questa si ottiene

$$\frac{1}{k}P + v = \frac{1}{k}G_v P G_v^{-1} \quad (4.1.2.B)$$

e sottraendo la (4.1.2.A) alla (4.1.2.B) si ottiene

$$\dot{Q} = \frac{1}{k}P + u(Q)$$

ovvero la (4.7a). [18]

⁵Questo risultato consente di anticipare la così detta **prima regola di superselezione di Bargmann**: fissare la massa della particella vuol dire fissare la rappresentazione

verifica la (4.7b) è sicuramente il così detto operatore di energia cinetica:

$$H_0 = \frac{\hat{P}^2}{2k}$$

A questo punto, siccome $i[H - H_0, Q] = 0$, allora $H - H_0 = V(Q)$, cioè:

$$H = H_0 + V(Q) \tag{4.8}$$

dove $V(Q)$ è una funzione dell'operatore di posizione Q (Quest'ultima implicazione si ottiene dalla completezza di Q [18]). Si vede bene che sostituendo la (4.8) nella (4.3), si ottiene la ben nota equazione di Schrödinger:

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \frac{\hat{P}^2}{2k} |\psi\rangle + V(Q) |\psi\rangle$$

Tale risultato mette in luce l'importanza, dal punto di vista della fisica, della teoria delle rappresentazioni proiettive, che ci ha consentito di interpretare in termini fisici gli operatori di traslazione spaziale P e del *boost* della velocità Q , nonché di fissare il ruolo della massa della particella. Per tali ragioni si passa, ora, ad esporre nel dettaglio la teoria delle rappresentazioni proiettive sviluppata da Bargmann nel 1954 [7], opportunamente integrata da contributi recenti.

proiettiva del gruppo di Galileo; cambiare la massa della particella vuol dire passare ad una rappresentazione proiettiva differente (non-equivalente) [22]

4.2 Teoria delle rappresentazioni proiettive

Definizione 4.2.

Sia G un gruppo di elementi r, s, t, \dots . Una rappresentazione proiettiva di G è un'applicazione $R(G) : r \rightarrow \mathcal{U}_r$ di G nei raggi degli operatori unitari tale che

$$U_r \cdot U_s = \omega(r, s)U_{rs} \quad (4.9a)$$

$$\mathcal{U}_r \cdot \mathcal{U}_s = \mathcal{U}_{rs} \quad (4.9b)$$

dove $\omega(r, s) : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua nelle coordinate di r, s di modulo 1.

Nel seguito si tratteranno esclusivamente i gruppo topologici, quindi, in accordo con tale scelta, ogni omomorfismo (o isomorfismo) di un gruppo in un'altro è da intendersi continuo.

Una rappresentazione proiettiva di un gruppo G è detta **continua** se per ogni elemento r in G , ogni raggio \mathcal{R}_ψ ed ogni numero positivo ε esiste un intorno \mathcal{N} di r su G tale che $d(\mathcal{R}_{s\psi}, \mathcal{R}_{r\psi}) < \varepsilon$, se $s \in \mathcal{N}$, dove $\mathcal{R}_{r\psi}$ è il raggio generato dal vettore $U_r |\psi\rangle$, con $|\psi\rangle \in \mathcal{R}_\psi$, $U_r \in \mathcal{U}_r$.

Teorema 4.2.

Sia \mathcal{U}_r una rappresentazione proiettiva continua di un gruppo G . Per tutti gli r in un intorno \mathcal{N}_0 opportunamente scelto dell'identità e di G si può selezionare un insieme continuo di rappresentanti $U_r \in \mathcal{U}_r$, cioè tali che per ogni vettore $|\psi\rangle$, ogni $r \in \mathcal{N}_0$ ed ogni positivo ε esiste un intorno \mathcal{N} di r tale che $\|U_s |\psi\rangle - U_r |\psi\rangle\| < \varepsilon$ se $s \in \mathcal{N}$.

Fattori ed esponenti locali

Sia \mathcal{U}_r un insieme ammissibile, dove per insieme ammissibile di operatori U_r si intende un insieme di operatori che soddisfano alle condizioni del Teorema 4.2, di rappresentanti di una rappresentazione proiettiva continua del gruppo G definiti su un intorno \mathcal{N}_0 , con $U_e = 1$ matrice identità. Se r, s ed rs appartengono ad \mathcal{N}_0 , allora U_{rs} è definito e gli operatori $U_r U_s$ ed U_{rs} appartengono allo stesso raggio:

$$U_r U_s = \omega(r, s)U_{rs} \quad (4.10)$$

dove $\omega(r, s)$ è una funzione nelle coordinate di r, s , di modulo 1, detta **fattore di fase** o **moltiplicatore**. Poiché $U_e = 1$, segue che:

$$\omega(e, e) = 1 \quad (4.11)$$

mentre dalla proprietà associativa discende:

$$\omega(r, s)\omega(rs, t) = \omega(s, t)\omega(r, st), \quad \forall r, s, t \in \mathcal{N} \subset G \quad (4.12)$$

Da $U_r U_e = U_e U_r = U_r$ segue poi:

$$\omega(r, e) = \omega(e, r) = 1, \quad \forall r \in \mathcal{N} \quad (4.13)$$

La corrispondenza $r \rightarrow U_r$ così costruita coincide con una rappresentazione unitaria di G quando il fattore di fase è equivalente a 1.

Operando una scelta differente dei rappresentati dei raggi, ad esempio trasformando $U_r \rightarrow U'_r = \phi(r)U_r$, con $\phi(r)$ funzione di modulo 1 continua nelle coordinate di r , si otterrà un nuovo fattore di fase $\omega'(r, s)$, che risulterà equivalente ad $\omega(r, s)$, con relazione di equivalenza (vedi Definizione A.5) data da:

$$\omega'(r, s) = \omega(r, s) \frac{\phi(r)\phi(s)}{\phi(rs)} \quad (4.14)$$

Quindi due fattori di fase per cui è vera la relazione (4.14) appartengono alla stessa classe di equivalenza, e così lo studio e la determinazione delle rappresentazioni proiettive di un dato gruppo di simmetria G comporta lo studio delle classi di equivalenza dei fattori di fase, ovvero le classi disgiunte di fattori non-equivalenti, dove per fattore di fase si intende un'applicazione continua di $G \times G$ che soddisfa una relazione tipo (4.10).

Inoltre tutte le funzioni che soddisfano alle (4.12) e (4.13) sono fattori possibili per la stessa rappresentazione proiettiva: il problema della determinazione di tali fattori può essere spostato (ed in parte semplificato) dai fattori agli **esponenti di fase locali**, ponendo $\omega(r, s) = e^{i\xi(r, s)}$:

Definizione 4.3.

Un esponente locale di un gruppo G definito su un intorno \mathcal{N} di e è una funzione continua a valori reali $\xi(r, s)$ che è definita per tutti gli elementi r, s di \mathcal{N} e che soddisfa alle relazioni:

$$\xi(e, e) = 0, \quad \forall r \in \mathcal{N} \subset G \quad (4.15)$$

$$\xi(r, s) + \xi(rs, t) = \xi(s, t) + \xi(r, st), \quad \forall r, s, t \in \mathcal{N} \subset G \quad (4.16)$$

Si verifica, poi, che:

$$\xi(r, e) = 0, \quad \xi(e, t) = 0 \quad (4.17a)$$

Per ogni $r \in \mathcal{N}$, tale che $r^{-1} \in \mathcal{N}$, vale la seguente relazione:

$$\xi(r, r^{-1}) = \xi(r^{-1}, r) \quad (4.17b)$$

Infine due esponenti locali ξ, ξ' definiti rispettivamente sugli intorno $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ di e sono detti equivalenti se, su un dato intorno $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N} \cap \mathcal{N}'$, l'equazione

$$\xi'(r, s) = \xi(r, s) + \Delta[\zeta] \quad (4.18a)$$

è valida, dove

$$\Delta[\zeta] = \zeta(r) + \zeta(s) - \zeta(rs) \quad (4.18b)$$

con $\zeta(r) = e^{i\phi(r)}$ funzione continua in r a valori reali definita su \mathcal{N}_1^2 . Si osserva che $\zeta(e) = 0$.

Come detto, tutto ciò è valido in un opportuno intorno \mathcal{N} di e identità del gruppo G scelto. Si può però estendere un esponente di fase (e quindi un fattore di fase) a tutto il gruppo G , a patto che, come si vedrà in seguito, questo abbia alcune particolari proprietà.

Lemma 4.1.

Per una rappresentazione proiettiva continua a dimensione finita \mathcal{U}_r di un gruppo G ogni fattore locale è equivalente ad 1.

Dimostrazione. Si indica il determinante di U_r con $D(r)$. ($D(r)$ è continuo, $|D(r)| = 1$ e $D(e) = 1$). Da $U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs} = e^{i\xi(r, s)} U_{rs}$ segue che $D(r)D(s) = e^{in\xi(r, s)} D(rs)$, dove n è la dimensione della rappresentazione. Se l'intorno \mathcal{N} è opportunamente scelto, ovvero tale che $|\omega - 1|$ e $|D - 1|$ siano abbastanza piccoli, si ottiene $\delta(r) + \delta(s) = n\xi(r, s) + \delta(rs)$, dove $\delta(r) = -i \lg D(r)$. Così $\xi'(r, s) = \xi(r, s) + \Delta_{r, s}[\varepsilon] = 0$ ($\varepsilon(r) = -\frac{\delta(r)}{n}$).

Gli operatori corrispondenti $U'_r = e^{i\xi(r, s)} U_r$ hanno determinante 1.

Il gruppo locale H

Definizione 4.4.

Sia $r \rightarrow \mathcal{U}_r$ una rappresentazione proiettiva continua di un dato gruppo G , sia poi U_r un suo insieme ammissibile di rappresentanti definito sull'intorno \mathcal{N}_0 , e sia infine $\mathcal{N}^2 \subset \mathcal{N}_0$. Allora gli operatori contenuti in \mathcal{U}_r ($r \in \mathcal{N}_0$) hanno la forma $e^{i\theta} U_r$, con θ reale. Se $r, s \in \mathcal{N}$:

$$(e^{i\theta} U_r) (e^{i\theta'} U_s) = e^{i(\theta+\theta'+\xi(r, s))} U_{rs} \quad (4.19)$$

Sia quindi ξ_2 un esponente locale di G definito su \mathcal{N} . Allora il *gruppo locale (coomologico)* H è costituito dalle coppie $\bar{r} = \{\theta, r\}$, dove θ numero reale, r

elemento di G in \mathcal{N}^2 , con la seguente moltiplicazione in H , definita per ogni due elementi \bar{r}_1, \bar{r}_2 :

$$\{\theta_1, r_1\} \cdot \{\theta_2, r_2\} = \{\theta_1 + \theta_2 + \xi(r_1, r_2), r_1 r_2\} \quad (4.20)$$

Si noti che H , come spazio topologico, è il prodotto di \mathcal{N}^2 per la linea reale.

L'identità in H è $\bar{e} = \{0, e\}$, con e l'identità in G in \mathcal{N}^2 . L'inverso di $\{\theta, r\}$ è $\{-(\theta + \xi(r, r^{-1})), r^{-1}\}$, se r, r^{-1} sono definiti in \mathcal{N} .

Gli elementi $\bar{t}(\theta) = \{\theta, e\}$ formano un sottogruppo locale T ad un parametro che appartiene al centro di H . Così ogni elemento $\{\theta, r\}$ di H può essere unicamente espresso nella forma $\{\theta, r\} = \{0, r\} \cdot \bar{t}(\theta) = \bar{t}(\theta) \cdot \{0, r\}$. Infine H/T è localmente isomorfo a G .

Siano ora ξ e ξ' due esponenti locali equivalenti, $\xi' = \xi + \Delta[\zeta]$ su \mathcal{N}_1 . Allora i corrispondenti gruppi locali H, H' sono localmente isomorfi. Indicati rispettivamente con $\bar{r} = \{\theta, r\}$, $\bar{r}' = \{\theta', r'\}$ gli elementi di H, H' , un isomorfismo, $\bar{r} = f(\bar{r}')$, con $r \in \mathcal{N}_1^2$, è dato da

$$\theta' = \theta - \zeta(r), \quad r' = r \quad (4.21)$$

tale che $f(\bar{r}_1)f(\bar{r}_2) = f(\bar{r}_1\bar{r}_2)$ se $r_1, r_2 \in \mathcal{N}_1$. Si può dire che la (4.21) definisce una differente parametrizzazione del gruppo locale H .

Si noti che il gruppo locale H di ξ è localmente isomorfo ad ogni gruppo locale H' di $\xi' = \gamma\xi$, dove γ è una costante non-nulla. Un isomorfismo tra H e tali H' è dato da $\bar{r}' = \{\theta', r'\} = h(\bar{r})$, dove

$$\theta' = \gamma(\theta), \quad r' = r, \quad r \in \mathcal{N} \quad (4.22)$$

se ξ è definito su \mathcal{N} .

4.2.1 Fattori ed esponenti definiti su tutto il gruppo

Esistenza della rappresentazione proiettiva compatibile con un dato fattore ω

Se per una rappresentazione proiettiva continua di G si può selezionare un insieme ammissibile di rappresentanti su tutto il gruppo, e non solo in un intorno dell'identità, allora un fattore ω è definito ovunque su G . D'altra parte, per un dato fattore ω definito su tutto il gruppo G , si potrà costruire una rappresentazione proiettiva continua compatibile con, ad esempio, una famiglia di operatori U_r che soddisfano alla (4.10). Poiché la costruzione coinvolge l'integrazione sul gruppo, bisogna assumere l'esistenza di una misura invariante in G (come è certamente il caso di un gruppo di Lie).

La costruzione procede come segue:

Sia dt l'invariante d'integrazione (vedi Definizione 1.12) a sinistra su G e sia \mathcal{F} l'insieme di tutte le funzioni $f(t)$ integrabili al quadrato su G , così che:

$$\langle f | g \rangle = \int_G \overline{f(t)} g(t) dt$$

Si definisce, per un dato fattore $\omega(r, s)$, $g = U_r f$ dall'equazione:

$$g(t) = \omega(r, r^{-1}t) f(r^{-1}t) \quad \text{o} \quad g(rt) = \omega(r, t) f(t) \quad (4.23)$$

Per gli operatori U_r si trova:

1. U_r è unitario:

(a) ha inversa data da $f(t) = \overline{\omega(r, t)} g(r, t)$;

(b) è isometrico; siccome $|g(t)| = |f(r^{-1}t)|$, allora

$$\int_G |g(t)|^2 dt = \int_G |f(r^{-1}t)|^2 dt = \int_G |f(t)|^2$$

2. $U_e = 1$, poiché $\omega(e, t) = 1$

$$(g(t) = \omega(e, t) f(t) = U_e f = f \implies \omega(e, t) = 1);$$

3. $U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs}$

Infatti, sia $g = U_s f$, ovvero $g(y) = \omega(s, s^{-1}y) f(s^{-1}y)$, $y \in G$, e $h = U_r g$, ovvero $h(z) = \omega(r, r^{-1}z) g(r^{-1}z)$, $z \in G$. Si pone, ora, $G \ni r^{-1}z = x$, da cui $h(rx) = \omega(r, x) g(x) = \omega(r, x) \omega(s, s^{-1}x) f(s^{-1}x)$.

Si pone, infine, $G \ni s^{-1}x = t$, da cui $h(rst) = \omega(r, st) \omega(s, t) f(t)$.

Però $H = U_{rs} f$, ovvero $h(t) = \omega(rs, (rs)^{-1}t) f((rs)^{-1}t)$, ovvero $h(rst) = \omega(rs, t) f(t)$.

D'altra parte $\omega(r, s)$ è un fattore di fase e deve quindi verificare la (4.14). Quindi

$$h(rst) = \omega(r, st) \omega(s, t) f(t) = \omega(r, s) \omega(rs, t) f(t) = \omega(r, s) (U_{rs} f)(t)$$

4. Gli operatori U_r sono strettamente continui in r .

Posto in (4.23) $g(t) = \omega(r, r^{-1}t) f_1(t)$, con $f_1 = V_r f$, dove V_r sono gli operatori della rappresentazione regolare di G , strettamente continui.

Moltiplicare per $\omega(r, r^{-1}t)$ non elimina tale proprietà.

Ciò completa la dimostrazione del seguente teorema:

Teorema 4.3.

Per ogni fattore ω di un gruppo G localmente compatto esiste una rappresentazione proiettiva continua di G compatibile con ω .

Sulle rappresentazioni dei gruppi semplicemente connessi

Puntiamo momentaneamente l'attenzione sulle rappresentazioni ordinarie di un dato gruppo G , localmente connesso. Per legare le proprietà locali (vicino all'identità di G) a quelle globali si assume G connesso.

Ogni elemento di un gruppo connesso G può essere scritto come prodotto finito di elementi r_i appartenenti ad un fissato intorno \mathcal{M} , arbitrariamente scelto:

$$r = r_1 r_2 \dots r_n \quad (4.24)$$

Definizione 4.5.

Una *rappresentazione unitaria locale* di un gruppo G definita su un intorno \mathcal{N} è un'applicazione di \mathcal{N}^2 negli operatori unitari V_r ($r \in \mathcal{N}^2$) tale che $V_r V_s = V_{rs}$, se $r, s \in \mathcal{N}$.

Se G oltre ad essere connesso, è anche *semplicemente connesso*, una rappresentazione locale può sempre essere estesa ad una rappresentazione globale di G : per ogni rappresentazione locale di un gruppo G semplicemente connesso esiste un intorno $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$ tale che:

$$V_{r_1} V_{r_2} \dots V_{r_n} = V_{r'_1} V_{r'_2} \dots V_{r'_n}, \quad r_i \in \mathcal{N}, r'_i \in \mathcal{N}^*$$

se $r_1 r_2 \dots r_n = r'_1 r'_2 \dots r'_n$.

Lemma 4.2.

Per una rappresentazione locale unitaria V_r di un gruppo G connesso e semplicemente connesso definita su un intorno \mathcal{N} esiste una rappresentazione unitaria W_r di tutto il gruppo, determinata univocamente, che coincide con la rappresentazione locale su un qualche intorno $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$. essa è fortemente continua se la rappresentazione locale è fortemente continua.

Dimostrazione.

1. Sia W_r una rappresentazione di G che coincide con V_r su un qualche intorno $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Se r è espresso nella forma (4.24), allora $W_r = W_{r_1} W_{r_2} \dots W_{r_n}$, e poiché $W_{r_i} = V_{r_i}$ su \mathcal{M} ,

$$W_r = V_{r_1} V_{r_2} \dots V_{r_n} \quad (4.25)$$

2. **Unicità di W_r .** Sia W'_r una seconda rappresentazione, che coincide con V_r su un intorno \mathcal{M}' , e si sceglie un intorno $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$. Applicando la (4.25) ad \mathcal{M}_1 invece che ad \mathcal{M} si trova la stessa espressione per W_r e W'_r .

3. **Esistenza di W_r .** La (4.25) può essere utilizzata per definire W_r , con $\mathcal{N}^* = \mathcal{M}$, poiché, dalla (4.24), il prodotto nella (4.25) dipende solo da r , ma non dalla sua decomposizione in fattori r_i . In particolare $W_r = V_r$, se $r \in \mathcal{N}^*$. La proprietà della rappresentazione è una conseguenza immediata. Siano $r = r_1 \dots r_n$, $s = s_1 \dots s_n$. Allora $rs = r_1 \dots r_n s_1 \dots s_n$, e quindi $W_{rs} = V_{r_1} \dots V_{r_n} V_{s_1} \dots V_{s_n} = W_r W_s$.
4. La forte continuità di V_r implica la forte continuità di W_r , per ogni r , s sufficientemente vicini tali che $r^{-1}s \in \mathcal{N}^*$ e, per ogni vettore $|v\rangle$:

$$\begin{aligned} \|(W_s - W_r) |v\rangle\| &= \|W_r(W_{r^{-1}s} - 1) |v\rangle\| = \|(W_{r^{-1}s} - 1) |v\rangle\| = \\ &= \|(V_{r^{-1}s} - 1) |v\rangle\| \end{aligned}$$

che dimostra l'asserzione.

Rappresentazioni proiettive di G indotte da rappresentazioni ordinarie

Ogni rappresentazione unitaria fortemente continua di G genera una rappresentazione proiettiva continua univocamente determinata che è detta *indotta* dalla rappresentazione U_r . Per la rappresentazione unitaria U_r il fattore ω equivale ad 1, e quindi ogni fattore locale della rappresentazione proiettiva è equivalente ad 1.

Come conseguenza del Lemma 4.2 segue:

Teorema 4.4.

Ogni rappresentazione proiettiva continua U_r di un gruppo G connesso e semplicemente connesso con un fattore locale pari ad 1 è indotta da una rappresentazione unitaria fortemente continua U_r di G .

Dimostrazione. Per ipotesi esiste un insieme ammissibile di rappresentanti $U_r \in \mathcal{R}_r$ ($r \in \mathcal{N}^2$) tali che $U_r U_s = U_{rs}$ ($r, s \in \mathcal{N}$), cioè U_r è una rappresentazione locale di G . Sia U'_r ($r \in G$) la rappresentazione di G costruita in accordo con la (4.25). Dalla (4.25) $U'_r \in \mathcal{R}_{r_1} \dots \mathcal{R}_{r_n} = \mathcal{R}_r$, e quindi $U'_r \in \mathcal{R}_r, \forall r$.

Corollario 4.1.

Ogni rappresentazione proiettiva a dimensione finita di un gruppo G connesso e semplicemente connesso è indotta da una rappresentazione unitaria continua di G .

In questo caso ogni fattore locale è equivalente ad 1.

Estensione di una rappresentazione proiettiva locale

Non è sempre possibile estendere una rappresentazione proiettiva continua locale di un dato gruppo G a tutto il gruppo, ovvero non è sempre possibile passare da un insieme ammissibile di rappresentanti definito su un dato intorno \mathcal{N} ad un insieme definito su tutto il gruppo. Nel caso dei gruppi connessi e semplicemente connessi viene in aiuto il seguente, importantissimo teorema:

Teorema 4.5.

Siano G un gruppo connesso e semplicemente connesso, ω un fattore di fase definito su tutto G , U_r una rappresentazione proiettiva continua tale che il fattore locale definito da un insieme ammissibile di rappresentanti U_r opportunamente scelti coincida con ω in un qualche intorno \mathcal{N} . Allora esiste un insieme ammissibile di operatori unitari U'_r , univocamente determinato, per l'intero gruppo tale che $U'_r U'_s = \omega(r, s) U'_{rs}$, $\forall r, s$ e che $U'_r = U_r$ su un qualche intorno $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$.

Dimostrazione.

1. Poiché G è connesso e semplicemente connesso, l'equazione $e^{i\xi(r,s)} = \omega(r, s)$ ha un'unica soluzione continua $\xi(r, s)$ ($\forall r, s \in G$), che soddisfa alle (4.15) e (4.16) ed è quindi esponente di G . Allora il gruppo locale H di G è allo stesso modo connesso e semplicemente connesso.
2. Si applica il Lemma 4.2 ad H . Per $\bar{r} = \{\theta, r\}$, $V_{\bar{r}} = V(\theta, r) = e^{i\theta} U_r$ ($r \in \mathcal{N}^2$). In accordo con le (4.19), (4.20), V_r è una rappresentazione unitaria locale di H definita sull'intorno \mathcal{M} ($-\infty < \theta < +\infty$, $r \in \mathcal{N}$). Dalla (4.25) si ottiene una rappresentazione unitaria fortemente connessa $W_r = W_r(\theta, r)$ di H che coincide con V_r su un qualche intorno \mathcal{M}^* . \mathcal{M}^* contiene sicuramente un intorno \mathcal{M}' tale che $-c < \theta < c$, $r \in \mathcal{N}^*$, con un'opportuna scelta di c ed $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$.
3. $\forall \theta$, $\{\theta, e\} = \{\theta_1, e\}^n$, dove $\theta_1 = \frac{\theta}{n}$, con $|\theta_1| < c$. Così, dalla (4.25), $W(\theta, e) = (V(\theta, e))^n = e^{i\theta} 1$. Posto $U'_r = W(0, r)$, $\forall r$, poiché $\{\theta, r\} = \{\theta, e\} \cdot \{0, r\}$, si ha, $\forall r$:

$$W(\theta, r) = e^{i\theta} U'_r \quad (4.26a)$$

e $U'_r = U_r$ se $r \in \mathcal{N}^*$. Comunque $\{0, r\} \cdot \{0, s\} = \{\xi(r, s), rs\}$, così che:

$$U'_r U'_s = e^{i\xi(r,s)} U'_{rs} = \omega(r, s) U_{rs} \quad (4.26b)$$

4. Si pone $r = r_1 \dots r_n$, con $r_j \in \mathcal{N}^*$. Chiaramente $U'_{r_k} \in \mathcal{U}_{r_k}$. Dalla (4.26b), $U'_{r_s} \in \mathcal{U}_{r_s}$ se $U'_r \in \mathcal{U}_r$, $U'_s \in \mathcal{U}_s$. Quindi, per induzione, $U'_r \in \mathcal{U}_{r_1} \dots \mathcal{U}_{r_n} = \mathcal{U}_r$.
5. Ogni insieme U'_r , dalle (4.26), e dalla (4.19), definisce una rappresentazione $W(\theta, r) = e^{i\theta} U'_r$ di H e, per il Lemma 4.2, è unicamente determinata.

Se G non è semplicemente connesso, il teorema può fallire in due casi:

- a) Può essere impossibile selezionare un insieme continuo di rappresentanti per tutto il gruppo.
- b) Può essere impossibile soddisfare la (4.26b) anche se la continuità di U'_r non è assunta.

Entrambi i casi occorrono per le rappresentazioni a *doppio valore* del gruppo delle rotazioni.

Estensione degli esponenti locali

Definizione 4.6.

Un esponente ξ_1 di G è detto *estensione di un esponente locale* ξ di G se $\xi_1(r, s) = \xi(r, s)$ in un qualche intorno \mathcal{N} di G .

Teorema 4.6.

Siano ξ, ξ' esponenti locali equivalenti di un gruppo G connesso e semplicemente connesso, così che $\xi' = \xi + \Delta_{r,s}[\zeta]$ su un qualche intorno \mathcal{N} , e siano gli esponenti ξ_1, ξ'_1 di G estensioni rispettivamente di ξ, ξ' . Allora, $\forall r, s \in G$, $\xi'_1(r, s) = \xi_1(r, s) + \Delta_{r,s}[\zeta_1]$, dove $\zeta_1(r)$ è continua in r e, su un qualche intorno $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$, $\zeta_1 = \zeta$.

Dimostrazione. I due esponenti ξ_1, ξ'_1 definiscono due gruppi locali H_1, H'_1 connessi e semplicemente connessi, con elementi \bar{r}, \bar{r}' rispettivamente) per cui il prodotto grupale è dato dalla (4.20). La (4.21) definisce un'isomorfismo locale $\bar{r}' = f(\bar{r})$ di H_1 in H'_1 :

$$f(\bar{r}) = f(\theta, r) = \{\theta - \zeta(r), r\} \quad (4.27)$$

con $r \in \mathcal{N}_1$, se l'intorno \mathcal{N}_1 è scelto in maniera tale che $\xi_1 = \xi$, $\xi'_1 = \xi_1$, $\xi' = \xi + \Delta[\zeta]$ sono soddisfatte su \mathcal{N} . (4.27) può essere unicamente estesa all'isomorfismo globale $f_1(\bar{r}) = f_1(\theta, r) = \bar{r}'$ di H_1 e H'_1 tale che $f_1(\bar{r}) = f(\bar{r})$ su un qualche intorno \mathcal{M}^* ($-c < \theta < c$, $r \in \mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$) su H_1 . Come nella dimostrazione del Teorema 4.5 si trova, dalla (4.27), che $f_1(\theta, e) = \{\theta, e\}$,

$\forall \theta$. Posto $f_1(0, r) = \{-\zeta_1(r), g(r)\}$, dove $\zeta_1(r)$ è una funzione continua in r e $g(r)$ un elemento di G da determinare. L'equazione $\{\theta, r\} = \{\theta, e\} \cdot \{0, r\}$ implica che $f_1(\theta, r) = \{\theta - \zeta_1(r), g(r)\}$.

Calcolando $f_1(0, r)f_1(0, s)$ si trova che $g(rs) = g(r)g(s)$, e poiché $g(r) = r$, se $r \in \mathcal{N}^*$ (la (4.27) mostra che $g(r) = r$ per tutti gli r):

$$f_1(\bar{r}) = f_1(\theta, r) = \{\theta - \zeta_1(r), r\}, \quad \forall r \in H_1$$

Infine, $f_1(0, r)f_1(0, s) = f_1(\xi_1(r, s), rs)$. Quindi:

$$\{\xi'_1(r, s) - \zeta_1(r) - \zeta_1(s), rs\} = \{\xi_1(r, s) - \zeta_1(r, s), rs\}$$

così che $\xi'_1 = \xi_1 + \Delta[\zeta]$ su tutto il gruppo e dalla (4.27) $\zeta_1(r) = \zeta(r)$ e $r \in \mathcal{N}^*$.

4.2.2 Esponenti locali dei gruppi di Lie

Se G è un gruppo di Lie i suoi esponenti locali possono essere analizzati senza grosse difficoltà. Poiché la struttura locale di G è univocamente determinata dalla sua algebra \mathfrak{g} di Lie (o dalle sue costanti di struttura - vedi Sezione 2.6), lo saranno anche i suoi esponenti locali. La determinazione degli esponenti locali segue il percorso già tracciato da Bargmann [7] e che a sua volta riprende la costruzione sviluppata da Iwasawa nel 1949 [6].

Alcuni richiami sulle proprietà dei gruppi di Lie

Prima di proseguire si faranno alcuni brevi richiami e puntualizzazioni sui gruppi di Lie, già esaminati nella Sezione 2.

Un gruppo di Lie G' di dimensione n è un insieme di elementi r che possono essere messi in corrispondenza uno a uno con i punti di una sfera aperta \mathcal{S} intorno all'origine di uno spazio Euclideo di dimensione n (vedi Esempio 1 a pag.28). Quindi ad ogni elemento del gruppo si può associare un punto nella sfera \mathcal{S} di coordinate ρ^1, \dots, ρ^n . In questo modo la regola di moltiplicazione per il gruppo può semplicemente essere scritta come (vedi la (2.3))

$$\tau^i = f^i(\rho^i, \dots, \rho^n; \sigma^1, \dots, \sigma^n)$$

dove σ^j, τ^j sono le coordinate rispettivamente di s, t , con $rs = t \in \mathcal{S}$. Le funzioni $f^i(r, s)$ sono unicamente determinate, come funzioni delle coordinate canoniche ρ, σ , su un intorno sufficientemente piccolo dell'unità (vedi Definizione A.20).

Un sottogruppo ad un parametro di G' è un arco continuo $r(\tau)$, con $|\tau| < \gamma$, in \mathcal{N}_0 tale che $r(\tau_1)r(\tau_2) = r(\tau_1 + \tau_2)$, se $-\gamma < \tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2 < \gamma$.

L'algebra di Lie \mathfrak{g} di G

In termini delle coordinate canoniche⁶, l'algebra di Lie (o *gruppo infinitesimo*) \mathfrak{g} di G' può essere descritta come lo spazio vettoriale a dimensione n dei vettori a che generano i sottogruppi locali ad un parametro di G' . Viene poi definita un'operazione binaria in \mathfrak{g} , la parentesi di commutazione $[a, b]$, che assegna un vettore in \mathfrak{g} per ogni coppia $a, b \in \mathfrak{g}$, lineare in a e b ed antisimmetrica:

$$[a, b] = -[b, a] \quad (4.28)$$

e che soddisfa all'identità di Jacobi:

$$[[a, a'], a''] + [[a', a''], a] + [[a'', a], a'] = 0 \quad (4.29)$$

$\forall a, a', a'' \in \mathfrak{g}$.

Indicato con $q(r, s) = r s r^{-1} s^{-1}$ il commutatore tra $r, s \in G'$, la parentesi di commutazione è definita come:

$$[a, b] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-2} q(\tau a, \tau b) \quad (4.30)$$

dove $r(\tau) = \tau a$, $s(\tau) = \tau b$ sono due sottogruppi locali ad un parametro.

A questo punto per ogni due elementi a_i, a_j di un insieme di n vettori linearmente indipendenti a_i , con $1 \leq i \leq n$, che formano una base per \mathfrak{g} è sufficiente definire una parentesi di commutazione. Allora

$$[a_i, a_j] = \sum_{m=1}^n c^m_{ij} a_m \quad (4.31)$$

dove c^m_{ij} sono le **costanti di struttura**. Dalla (4.28) segue:

$$c^m_{ij} = -c^m_{ji} \quad (4.32)$$

e dalla (4.29):

$$J^l_{kij} = \sum_{m=1}^n (c^l_{mk} c^m_{ij} + c^l_{mi} c^m_{jk} + c^l_{mj} c^m_{ki}) = 0 \quad (4.33)$$

Base standard. Scelto, per un dato insieme di coordinate canoniche, a_i come il vettore con i -sima componente pari ad 1 e j -sima ($j \neq i$) nulla, le costanti di struttura sono date da [30]:

$$c^m_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f^m}{\partial \rho^i \partial \sigma^j} - \frac{\partial^2 f^m}{\partial \rho^j \partial \sigma^i} \right)_{\rho^k = \sigma^k = 0} \quad (4.34)$$

⁶vedi 2. a pag.35 per le coordinate canoniche del primo tipo, e pag.36 per le coordinate canoniche del secondo tipo

dove $f^i(r, s)$ sono funzioni delle coordinate dell'elemento $t = rs$:

$$\tau^i = f^i(\rho^1, \dots, \rho^n; \sigma^1, \dots, \sigma^n) = f^i(r, s), \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.35)$$

con ρ^i coordinate di r , σ^i di s .

Costruzione di G' a partire dall'algebra. Date le costanti di struttura c^m_{ij} che soddisfano alle equazioni (4.32) e (4.33), si può costruire un gruppo locale di Lie G' le cui costanti di struttura sono proprio c^m_{ij} se riferite alla base standard di un sistema di coordinate canonico.

Esponenti locali differenziabili

Da adesso in poi G sarà un fissato gruppo di Lie ed \mathcal{N}_0 un fissato intorno canonico, ovvero un intorno su cui si può definire un sistema di coordinate canonico. Inoltre per *funzione differenziabile* si intenderà una funzione che, su un qualche intorno $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}_0$, ha derivate parziali di tutti gli ordini rispetto alle coordinate canoniche degli elementi del gruppo da cui dipende.

Lemma 4.3.

Su un gruppo di Lie G ogni esponente locale è equivalente ad un esponente locale differenziabile.

Dimostrazione. Sia ξ un esponente locale definito e limitato su $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_0$. Si scelgono gli intorni $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ tali che $\mathcal{N}_1^2 \subset \mathcal{N}$, $\mathcal{N}_2^2 \subset \mathcal{N}_1$. Si indicano gli invarianti di integrazione a sinistra ed a destra su G rispettivamente con $d r$ e $d^* r$, e si introducono due funzioni reali $\nu(r), \nu^*(r)$ su G con le seguenti proprietà:

1. ν e ν^* sono differenziabili su \mathcal{N} ;
2. ν e ν^* si annullano fuori da un intorno sferico \mathcal{N}_3 ($|r| < \mu$) contenuto in \mathcal{N}_2 ;
3. $\int_G \nu(r) d r = \int_G \nu^*(r) d^* r = 1$.

Una possibile scelta è $\nu(r) = \gamma \phi(r)$, $\nu^*(r) = \gamma^* \phi(r)$, dove

$$\phi(r) = \begin{cases} e^{-(\mu^2 - |r|^2)^{-1}} & \text{per } r \in \mathcal{N}_3 \\ 0 & \text{per } r \notin \mathcal{N}_3 \end{cases}$$

mentre le costanti γ, γ^* sono scelte in maniera tale che il punto 3. sia verificato. Si noti che ν e ν^* sono differenziabili su tutto il gruppo G .

Si definiscono, ora:

$$\begin{aligned} \xi'(r, s) &= \xi(r, s) + \Delta_{r,s}[\zeta] & r, s \in \mathcal{N}_1 \\ \zeta(r) &= - \int_G \xi(r, t) \nu(t) d t & r \in \mathcal{N}_1^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}\xi''(r, s) &= \xi'(r, s) + \Delta_{r,s}[\zeta'] & r, s \in \mathcal{N}_2 \\ \zeta'(r) &= -\int_G \xi'(u, r) \nu^*(u) d^* u & r \in \mathcal{N}_2^2\end{aligned}\quad (4.37)$$

Dalla (4.36) e dalla definizione di ν , per $r, s \in \mathcal{N}_1$, si ha:

$$\xi'(r, s) = \int_G (\xi(r, s) - \xi(r, t) - \xi(s, t) + \xi(rs, t)) \nu(t) dt$$

Ora $\int_G \xi(r, st) \nu(t) dt = \int_G \xi(r, t) \nu(s^{-1}t) dt$, e quindi

$$\xi'(r, s) = \int_G \xi(r, t) (\nu(s^{-1}t) - \nu(t)) dt, \quad r, s \in \mathcal{N}_1 \quad (4.38)$$

Con calcoli analoghi si ottiene:

$$\xi'(r, s) = \int_G \xi'(u, s) (\nu^*(ur^{-1}) - \nu^*(u)) d^* u, \quad r, s \in \mathcal{N}_2 \quad (4.39)$$

Inserendo la (4.38) in quest'ultima espressione si ottiene:

$$\begin{aligned}\xi''(r, s) &= \xi(r, s) + \Delta_{r,s}[\zeta''], & \text{con } r, s \in \mathcal{N}_2 \\ \zeta''(r) &= \zeta(r) + \zeta'(r), & \text{con } r \in \mathcal{N}_2^2 \\ \xi''(r, s) &= \int_G \int_G \xi(u, t) (\nu(s^{-1}t) - \nu(t)) \cdot (\nu^*(ur^{-1}) - \nu^*(u)) dt d^* u\end{aligned}\quad (4.40)$$

Nell'ultimo integrale solo ν e ν^* dipendono da r ed s . Così la differenziabilità di ξ'' rispetto alle coordinate di r, s segue da quella di ν e ν^* e dall'analiticità del prodotto grupale su \mathcal{N}_0 . Ciò conclude la dimostrazione del Lemma 4.3.

Lemma 4.4.

Se due esponenti differenziabili ξ_1, ξ_2 di un gruppo di Lie G sono equivalenti, allora, su un qualche intorno \mathcal{N}_1 , $\xi_2 = \xi_1 + \Delta[\zeta]$, con $\zeta(r)$ funzione differenziabile nelle coordinate di $r \in G$.

Dimostrazione. Si sceglie l'intorno \mathcal{N} ($\mathcal{N}^2 \subset \mathcal{N}_0$) tale che $\chi = \xi_2 - \xi_1 = \Delta[\zeta]$ è differenziabile su \mathcal{N} e $\zeta(r)$ è continua e limitata su \mathcal{N}^2 . Si pone, per $r \in \mathcal{N}$, $\eta(r) = \int_G \chi(r, t) \nu(t) dt$, dove $\nu(r)$ è la funzione definita per la dimostrazione del Lemma 4.3, e $\zeta_1(r) = \eta(r) - \zeta(r)$. Evidentemente $\eta(r)$ è differenziabile su \mathcal{N} , così come $\zeta_1(r)$:

$$\zeta_1(r) = \int_G (\zeta(t) - \zeta(rt)) \nu(t) dt = \int_G \zeta(t) (\nu(t) - \nu(r^{-1}t)) dt$$

Così $\zeta = \eta - \zeta_1$ è differenziabile su \mathcal{N} . Quindi, per ogni \mathcal{N}_1 tale che $\mathcal{N}_1^2 \subset \mathcal{N}$, ciò completa la dimostrazione del Lemma 4.4.

Esponenti locali di un gruppo ad un parametro

Per un gruppo ad un parametro G la sfera aperta \mathcal{N} è un intervallo aperto ($|\rho| < \gamma$, $\gamma > 0$), mentre l'operazione gruppale è la somma. L'esponente locale ξ_0 definito su \mathcal{N} è una funzione continua $\xi_0(\rho, \sigma)$ delle coordinate che soddisfa alle relazioni:

$$\xi_0(0, 0) = 0 \quad (4.41a)$$

$$\xi_0(\tau_1, \tau_2) + \xi_0(\tau_1 + \tau_2, \tau_3) = \xi_0(\tau_2, \tau_3) + \xi_0(\tau_1, \tau_2 + \tau_3) \quad (4.41b)$$

$$\xi_0(\tau, 0) = 0 \quad (4.41c)$$

Per un gruppo di tal genere vale il lemma seguente:

Lemma 4.5.

Ogni esponente locale di un gruppo di Lie ad un parametro è equivalente a zero.

Dimostrazione. Per il Lemma 4.3 si può assumere ξ_0 differenziabile. Si pone

$$\psi(\tau, \sigma) = \frac{\partial \xi_0(\tau, \sigma)}{\partial \sigma}$$

Si deriva la (4.41b) rispetto a τ_3 in $\tau_3 = 0$:

$$\psi(\tau_1 + \tau_2, 0) = \psi(\tau_2, 0) + \psi(\tau_1, \tau_2), \quad -\gamma < \tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2 < \gamma$$

Si definisce

$$\zeta_0(\tau) = \int_0^\tau \psi(\sigma, 0) d\sigma = \int_0^1 \tau \psi(\mu\tau, 0) d\mu, \quad |\tau| < \gamma \quad (4.42)$$

Allora $\zeta_0(0) = 0$ e, per $|\tau_i| < \frac{1}{2}\gamma$:

$$\begin{aligned} -\Delta_{\tau_1, \tau_2}[\zeta_0] &= \zeta_0(\tau_1 + \tau_2) - \zeta_0(\tau_1) - \zeta_0(\tau_2) = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \tau_2} \psi(\sigma, 0) d\sigma - \int_0^{\tau_1} \psi(\sigma, 0) d\sigma - \int_0^{\tau_2} \psi(\sigma, 0) d\sigma = \\ &= \int_0^{\tau_2} (\psi(\tau_1 + \sigma, 0) - \psi(\sigma, 0)) d\sigma = \int_0^{\tau_2} \psi(\tau_1, \sigma) d\sigma = \end{aligned}$$

Così

$$\xi_0(\tau_1, \tau_2) + \Delta_{\tau_1, \tau_2}[\zeta_0] = 0 \quad (4.43)$$

ovvero $\xi_0 \equiv 0$, e ciò completa la dimostrazione del Lemma 4.5.

Esponenti locali canonici

Definizione 4.7.

Un esponente locale ξ di un gruppo di Lie G definito su un intorno canonico \mathcal{N} è detto *canonico* se

1. ξ è differenziabile su \mathcal{N} ;
2. $\xi(r, s) = 0$ se r, s sono elementi dello stesso sottogruppo locale ad un parametro in \mathcal{N} .

In particolare $\xi(r, r^{-1}) = 0$.

Lemma 4.6.

Ogni esponente locale ξ di un gruppo di Lie è equivalente ad un esponente locale canonico.

Dimostrazione. Come per il Lemma 4.5, si assume ξ differenziabile sull'intorno \mathcal{N} ($|r| < \kappa$) su cui è definito. Si sceglie \mathcal{N}_1 ($|r| < \kappa_1$) tale che $\mathcal{N}_1^2 \subset \mathcal{N}$. Se $r \in \mathcal{N}_1$, allora $r \cdot r \in \mathcal{N}$, e poiché per le coordinate canoniche $r \cdot r = 2r$, segue che $\kappa_1 \leq \frac{1}{2}\kappa$. Per due elementi r, r' con coordinate canoniche ρ^k, ρ'^k rispettivamente, si pone

$$\chi_k(r, r') = \frac{\partial \xi(r, r')}{\partial \rho'^k}$$

e si definiscono

$$\zeta(r) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \rho^k \chi_k(\mu r, 0) d\mu \quad (4.44a)$$

$$\xi'(r, s) = \xi(r, s) + \Delta_{r,s}[\zeta] \quad (4.44b)$$

Poiché $\zeta(r)$ è differenziabile, e $\zeta(e) = 0$, ξ' è un esponente locale differenziabile su \mathcal{N}_1 .

Sia $r(\tau) = \tau a$ un sottogruppo ad un parametro fissato in \mathcal{N}_1 . Per $a \neq 0$, se $|\tau| < \gamma = \kappa/|a|$, allora $r(\tau) \in \mathcal{N}$, e se $r(\tau) \in \mathcal{N}_1$, allora $|\tau| < \kappa_1/|a| \leq \frac{1}{2}\gamma$. Si pone $\xi(\tau_1 a, \tau_2 a) = \xi_0(\tau_1, \tau_2)$ ($|\tau_i| < \gamma$) e si applicano i risultati ottenuti per la dimostrazione del Lemma precedente:

1. Essendo $\xi_0(\tau_1, \tau_2)$ un esponente locale, esso soddisfa alle equazioni (4.41a) e (4.41b).
2. Si indicano i componenti di a con α^k . Allora

$$\psi(\tau, \sigma) = \frac{\partial \xi_0(\tau, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \xi(\tau a, \sigma a)}{\partial \sigma} = \sum_{k=1}^n \alpha^k \chi_k(\tau a, \sigma a)$$

Confrontando le (4.42) e (4.44a) si trova:

$$\zeta_0(\tau) = \int_0^1 \tau \psi(\mu\tau, 0) d\mu = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (\tau \alpha^k \chi_k(\mu\tau a, 0)) d\mu = \zeta(\tau a)$$

Così, se $\tau_i a \in \mathcal{N}_1$, e quindi $|\tau_i| < \frac{1}{2}\gamma$, si ha

$$\xi'(\tau_1 a, \tau_2 a) = \xi(\tau_1 a, \tau_2 a) + \zeta(\tau_1 a) + \zeta(\tau_2 a) - \zeta((\tau_1 + \tau_2)a)$$

e quindi, per la (4.43):

$$\xi'(\tau_1 a, \tau_2 a) = \xi_0(\tau_1, \tau_2) + \Delta_{\tau_1, \tau_2}[\zeta_0] = 0$$

che corrisponde al punto 2. della Definizione 4.7 e quindi conclude la dimostrazione del Lemma 4.6.

Lemma 4.7.

Siano ξ_1, ξ_2 due esponenti locali equivalenti di un gruppo di Lie G , con ξ_1 canonico. Allora ξ_2 è canonico se e solo se, su un qualche intorno, $\xi_2 = \xi_1 + \Delta[\Lambda]$, dove $\Lambda(r)$ è una forma lineare nelle coordinate canoniche di r .

Dimostrazione: Necessità della condizione. Dal Lemma 4.4 esiste un intorno \mathcal{N} ($|r| < \kappa$) su cui ξ_2 e ξ_1 sono canonici e su cui

$$\xi_2(r, s) = \xi_1(r, s) + \Delta_{r,s}[\zeta] \quad (4.45a)$$

con $\zeta(r)$ funzione differenziabile definita per $r \in \mathcal{N}^2$. Si assume $r = \tau_1 a$, $s = \tau_2 a$. Allora $\xi_2 = \xi_1 = 0$, e quindi

$$\Delta_{r,s}[\zeta] = \zeta(\tau_1 a) + \zeta(\tau_2 a) - \zeta((\tau_1 + \tau_2)a) = 0 \quad (4.45b)$$

Si assume $|a| < \kappa$. La (4.45a) è verificata se $|\tau_i| \leq 1$, $|\tau_1 + \tau_2| \leq 1$, e per un fissato a segue:

$$\zeta(\tau a) = \tau \zeta(a)$$

Differenziando rispetto a τ , in $\tau = 0$ e per $|a| < \kappa$:

$$\zeta(a) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha^k = \Lambda(a), \quad \lambda_k = \frac{\partial \zeta(0)}{\partial \alpha^k} \quad (4.45c)$$

o $\zeta(r) = \Lambda(r)$ per $r \in \mathcal{N}$. Se $\mathcal{N}_1^2 \subset \mathcal{N}$, la (4.45a) è verificata con $\zeta = \Lambda$ per ogni $r, s \in \mathcal{N}_1$.

Sufficienza della condizione. Se $\zeta(r) = \Lambda(r)$ per $r \in \mathcal{N}_1^2 \subset \mathcal{N}$, allora $\xi_2 = \xi_1 + \Delta[\Lambda]$ è differenziabile su \mathcal{N}_1 , la (4.45b) è vera se $\tau_i a \in \mathcal{N}_1$, e $\xi_1(\tau_1 a, \tau_2 a) = 0$ implica $\xi_2(\tau_1 a, \tau_2 a) = 0$, ovvero ξ_2 è canonico. Ciò conclude la dimostrazione del Lemma 4.7.

Gruppo locale H

Lemma 4.8.

Un esponente locale $\xi(r, s)$ di un gruppo di Lie G è, su un qualche intorno \mathcal{N}' , una funzione analitica delle coordinate canoniche di r, s .

Dimostrazione. Si considera il gruppo locale H (Definizione 4.4) di un esponente canonico ξ di un gruppo di Lie G di dimensione n . Gli elementi di H sono $\bar{r} = \{\theta, r\}$, con θ numero reale. Il prodotto in H è quindi definito dalla (4.20):

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 = \{\theta_1, r_1\} \cdot \{\theta_2, r_2\} = \{\theta_1 + \theta_2 + \xi(r, s), r_1 r_2\}$$

Gli elementi \bar{r} di H possono essere descritte da $n+1$ coordinate $\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^n$, dove $\rho^0 = \theta$, ρ^1, \dots, ρ^n sono le coordinate di $r \in G$. Si introduce un intorno sferico \mathcal{M} su H :

$$|\bar{r}| = \left(\sum_{k=0}^n (\rho^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = ((\rho^0)^2 + |r|^2)^{\frac{1}{2}} < \kappa$$

Ora, $\xi(r, s)$ canonico per $|r| < \kappa$, $|s| < \kappa$; sia \mathcal{M} l'intorno $|\bar{r}| < \kappa$, e scelto \mathcal{M}_1 ($|\bar{r}| < \kappa_1$), tale che $\bar{r} \cdot \bar{s} \in \mathcal{M}$ se $\bar{r}, \bar{s} \in \mathcal{M}_1$, e se ρ^i, σ^i, τ^i ($0 \leq i \leq n$) sono le coordinate, rispettivamente, di $\bar{r}, \bar{s}, \bar{t} = \bar{r} \cdot \bar{s}$, allora segue dalla (4.20)

$$\tau^i = \bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s})$$

dove

$$\begin{aligned} \tau^0 &= \bar{f}^0(\bar{r}, \bar{s}) = \rho^0 + \xi^0 + \xi(r, s) \\ \tau^i &= \bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s}) = f^i(r, s) \end{aligned}$$

Sia $\xi(r, s)$, sia le $f^i(r, s)$ sono funzioni differenziabili, e così anche $\bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s})$ su \mathcal{M}_1 ; così H è un gruppo locale di Lie di dimensione $n+1$. In più le coordinate ρ^i sono canoniche su \mathcal{M}_1 .

Per un sistema di coordinate canonico le funzioni $\bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s})$ sono analitiche su un qualche intorno \mathcal{M}' . Segue, in particolare, che ξ è analitica su un qualche intorno \mathcal{N}' su G , così si conclude la dimostrazione del Lemma 4.8.

L'algebra \mathfrak{h} di H e gli esponenti infinitesimi

Come già fatto per G' , anche ad H si può associare un'algebra di Lie \mathfrak{h} .

In questo caso si avrà $\bar{q}(\bar{r}, \bar{s}) = \bar{r} \bar{s} \bar{r}^{-1} \bar{s}^{-1}$ che definisce il commutatore. Quindi la parentesi di commutazione corrisponde alla (4.30) sarà

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-2} \bar{q}(\tau \bar{a}, \tau \bar{b})$$

dove $\bar{a} = \{\alpha^0, a\}$ è un elemento dell'algebra di Lie \mathfrak{h} .
Quindi dalla (4.20) segue:

$$\begin{aligned} (\tau\bar{a})(\tau\bar{b}) &= \{\tau(\alpha^0 + \beta^0) + \xi(\tau a, \tau b), (\tau a)(\tau b)\} \\ (\tau\bar{a})^{-1}(\tau\bar{b})^{-1} &= \{-\tau(\alpha^0 + \beta^0) + \xi(-\tau a, -\tau b), (\tau a)^{-1}(\tau b)^{-2}\} \end{aligned}$$

Così:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = [\{\alpha^0, a\}, \{\beta^0, b\}] = \{\Xi(a, b), [a, b]\} \quad (4.46a)$$

dove

$$\begin{aligned} \Xi(a, b) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-2} \left(\xi((\tau a)(\tau b), (\tau a)^{-1}(\tau b)^{-1}) + \xi(\tau a, \tau b) + \right. \\ &\quad \left. + \xi((\tau a)^{-1}, (\tau b)^{-1}) \right) \end{aligned} \quad (4.46b)$$

Dall'antisimmetria di $[\bar{a}, \bar{b}]$ e dalla sua linearità in \bar{a}, \bar{b} si conclude che per $a, a', b, b' \in \mathfrak{g}$, e per λ, λ' reali:

$$\begin{aligned} \Xi(a, b) &= -\Xi(b, a) \\ \Xi(\lambda a + \lambda' a', b) &= \lambda \Xi(a, b) + \lambda' \Xi(a', b) \\ \Xi(a, \lambda b + \lambda' b') &= \lambda \Xi(a, b) + \lambda' \Xi(a, b') \end{aligned} \quad (4.46c)$$

Così Ξ è una forma bilineare antisimmetrica a valori reali su \mathfrak{g} .
Dall'identità di Jacobi segue poi che:

$$d\Xi(a, a', a'') = \Xi([a, a'], a'') + \Xi([a', a''], a) + \Xi([a'', a], a') = 0 \quad (4.47)$$

per $a, a', a'' \in \mathfrak{g}$.

Definizione 4.8.

Ogni forma bilineare antisimmetrica a valori reali Ξ definita sull'algebra di Lie \mathfrak{g} di un dato gruppo di Lie G per cui $d\Xi(a, a', a'') = 0$ sarà detta *esponente infinitesimo* di \mathfrak{g} . Se è data dalla (4.46b), si dice corrispondere all'esponente locale ξ di G .

Sia a_1, \dots, a_n una base di \mathfrak{g} ; si pone $\beta_{ij} = \Xi(a_i, a_j)$ per un esponente infinitesimo Ξ . Per due vettori di \mathfrak{g} si ha:

$$a = \sum_{i=1}^n \gamma^i a_i, \quad a' = \sum_{i=1}^n \gamma'^i a_i$$

e quindi

$$\Xi(a, a') = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} \gamma^i \gamma'^j, \quad \beta_{ij} = -\beta_{ji} = \Xi(a_i, a_j) \quad (4.48)$$

Poiché $[a_i, a_j] = \sum_{m=1}^n c^m_{ij} a_m$,

$$\Xi([a_i, a_j], a_k) = \sum_{m=1}^n c^m_{ij} \Xi(a_m, a_k) = \sum_{m=1}^n \beta_{mk} c^m_{ij}$$

e quindi, dalla (4.47), segue:

$$I_{kij} = \sum_{m=1}^n (\beta_{mk} c^m_{ij} + \beta_{mi} c^m_{jk} + \beta_{mj} c^m_{ik}) = 0 \quad (4.49)$$

che è equivalente all'identità di Jacobi.

Osservazione. Per ogni esponente infinitesimo Ξ di \mathfrak{g} , le equazioni (4.46a), (4.46b), (4.46c) definiscono un'algebra di Lie di dimensione $(n+1)$, e per questo la parentesi $[\bar{a}, \bar{b}]$ è antisimmetrica, bilineare e soddisfa all'identità di Jacobi in accordo con la (4.47).

Base standard su \mathfrak{h}

Date le coordinate canoniche ρ^1, \dots, ρ^n su G , si sceglie la base standard a_1, \dots, a_n su \mathfrak{g} . La base standard su \mathfrak{h} , algebra di H (coordinate canoniche $\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^n$), sarà allora

$$\bar{a}_0 = \{1, 0\}, \quad \bar{a}_i = \{0, a_i\}$$

Le costanti di struttura, determinate da $[\bar{a}_i, \bar{a}_j] = \sum_{m=0}^n \bar{c}^m_{ij} \bar{a}_m$, sono allora:

$$\begin{aligned} \bar{c}^0_{ij} &= \beta_{ij} && \text{per } 1 \leq i, j \leq n \\ \bar{c}^m_{ij} &= c^m_{ij} && \text{per } 1 \leq m, i, j \leq n \\ \bar{c}^m_{i0} &= \bar{c}^m_{0i} = 0 && \text{per } 0 \leq m, i \leq n \end{aligned} \quad (4.50)$$

La (4.34) applicata ad H implica

$$\bar{c}^0_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \bar{f}^0}{\partial \rho^i \partial \sigma^j} - \frac{\partial^2 \bar{f}^0}{\partial \rho^j \partial \sigma^i} \right)_{\rho^k = \sigma^k = 0}$$

Quindi, per uno ξ canonico:

$$\beta_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \rho^i \partial \sigma^j} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \rho^j \partial \sigma^i} \right)_{\rho^k = \sigma^k = 0} \quad (4.51)$$

Inoltre per un esponente della forma $\xi = \Delta[\Lambda]$, dove $\Lambda(r)$ è una forma lineare in $r \in G$ (vedi Lemma 4.7), si ha:

$$\Xi(a, b) = -\lim \tau^{-2} \Lambda(q(\tau a, \tau b)) = -\Lambda(\lim \tau^{-2} q(\tau a, \tau b))$$

ovvero

$$\Xi(a, b) = -\Lambda([a, b]) = -d[\Lambda] \quad (4.52)$$

Per i vettori a_i della base di \mathfrak{g} , con $\Lambda(a_i) = \lambda_i$, si ha:

$$\Xi(a_i, a_j) = \sum_{m=1}^n c^m_{ij} \Lambda(a_m)$$

o, inserendo quest'ultima nella (4.48)

$$\beta_{ij} = \sum_{m=1}^n c^m_{ij} \lambda_m \quad (4.53)$$

Segue, quindi, la seguente definizione:

Definizione 4.9.

Due esponenti infinitesimi Ξ, Ξ' di \mathfrak{g} sono detti equivalenti, se $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$, dove $\Lambda(a)$ è una forma lineare a valori reali definita su \mathfrak{g} .

Le forme antisimmetriche bilineari sull'algebra \mathfrak{g} sono determinate dagli $h = \frac{1}{2}n(n-1)$ coefficienti β_{ij} e quindi forma uno spazio lineare \mathcal{B} di dimensione h . In \mathcal{B} l'esponente infinitesimo genera un sottospazio lineare \mathcal{B}_1 e gli esponenti infinitesimi della forma $\Xi = d[\Lambda]$ generano un sottospazio lineare \mathcal{B}_2 di \mathcal{B}_1 , di dimensioni rispettivamente h_2, h_1 , con $h_2 \leq n$.

Considerando le classi di equivalenza degli esponenti infinitesimi Ξ , si ottiene uno spazio lineare $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2$ di dimensione $h^* = h_1 - h_2$. Per ogni \mathfrak{g} :

$$h^* = h_1 - h_2 \leq h - h_2 \leq h = \frac{1}{2}n(n-1)$$

La dimensione massima $h^* = h$ si verifica se e solo se \mathfrak{g} è abeliana, così come il gruppo G ad essa connesso. Infatti, $h_2 = 0$ implica che $d[\Lambda]$ si annulli per ogni forma lineare Λ , ovvero che $[a, b] = 0$ per tutti gli a, b . D'altra parte, nel caso di gruppo abeliano la (4.47) è nulla e quindi ogni forma bilineare antisimmetrica è un esponente infinitesimo e quindi $h^* = h$.

Corrispondenza tra gli esponenti locali e quelli infinitesimi

Ad ogni esponente canonico ξ di G corrisponde, per la (4.46b), un esponente infinitesimo Ξ di \mathfrak{g} unicamente determinato:

$$\xi \rightarrow \Xi \quad (4.54)$$

La corrispondenza (4.54) è ovviamente *lineare*, ovvero, se $\xi \rightarrow \Xi$, $\xi' \rightarrow \Xi'$ e, su un qualche intorno \mathcal{N} , $\xi'' = \gamma\xi + \gamma'\xi'$, con γ, γ' costanti, allora $\xi'' \rightarrow \gamma\Xi + \gamma'\Xi'$. Inoltre, se l'esponente infinitesimo Ξ di due esponenti locali canonici coincide, allora i due esponenti locali canonici stessi coincidono su un qualche intorno \mathcal{N} . Infatti, Ξ determina unicamente le costanti di struttura (4.50) del gruppo locale H , e di conseguenza è unicamente determinato dalle funzioni \bar{f}^i e così, in particolare, $\xi(r, s)$ su un intorno sufficientemente piccolo.

Lemma 4.9.

Due esponenti canonici ξ, ξ' sono equivalenti se e solo se i corrispondenti esponenti infinitesimi Ξ, Ξ' sono equivalenti.

Dimostrazione. Si assume $\xi' \equiv \xi$. Per il Lemma 4.7, $\xi' = \xi + \Delta[\Lambda]$ su un qualche \mathcal{N} , dove $\Lambda(r)$ è una forma lineare. Poiché $\Delta[\Lambda] \rightarrow -d[\Lambda]$ (vedi la (4.52)), segue che $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$, ovvero $\Xi' \equiv \Xi$.

Si assume $\Xi' \equiv \Xi$, ovvero $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$ per una qualche forma lineare $\Lambda(a)$ su \mathfrak{g} . Allora $\xi + \Delta[\Lambda] \rightarrow \Xi'$, e per l'unicità della corrispondenza (4.54) ciò dimostra che $\xi' = \xi + \Delta[\Lambda]$ su un qualche intorno \mathcal{N} , ovvero $\xi' \equiv \xi$.

Corollario 4.2.

Se per un gruppo G tutti gli esponenti infinitesimi sono equivalenti a zero, allora tutti gli esponenti canonici locali, e quindi tutti gli esponenti locali, sono equivalenti a zero.

Lemma 4.10.

Per ogni esponente infinitesimo Ξ di \mathfrak{g} esiste un esponente canonico locale ξ di G tale che $\xi \rightarrow \Xi$.

Dimostrazione. Un esponente infinitesimo definisce un'algebra di Lie \mathfrak{h} di dimensione $(n + 1)$ con costanti di struttura \bar{c}_{ij}^m della forma (4.50) e quindi un gruppo di Lie di dimensione $(n + 1)$ detto H e con queste costanti di struttura. Per le coordinate canoniche le funzioni analitiche

$$\tau^i = \bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s}) \quad (0 \leq i \leq n; \bar{r} = \rho^0, r; r = \rho^1, \dots, \rho^n)$$

definite su un qualche intorno \mathcal{M} su H sono tali che:

$$\begin{aligned} \tau^0 &= \rho^0 + \sigma^0 + \xi(r, s) \\ \tau^i &= f^i(r, s) \end{aligned}$$

con $\xi(r, s)$ funzioni che si annullano per $r = s = e$, in maniera tale che la (4.20) è verificata. Ciò mostra che ξ è canonico (ovvero $\xi(\tau_1 a, \tau_2 a) = 0$) e che ξ è un esponente locale di G poiché la legge associativa su H è equivalente alla relazione (4.12) che definisce gli esponenti locali.

Lemma 4.11.

Esiste una corrispondenza lineare tra le classi di equivalenza degli esponenti locali di un gruppo di Lie G e le classi di equivalenza degli esponenti infinitesimi dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di G .

Dimostrazione. Per il Lemma 4.6, è sufficiente considerare esponenti canonici locali. Per i Lemmi 4.9 e 4.10, la corrispondenza è fornita dalla (4.54). Non solo ogni classe di equivalenza (ξ) determina (unicamente) una classe di equivalenza (Ξ), ma d'altra parte ogni classe di equivalenza (Ξ) determina (unicamente) una classe di equivalenza (ξ).

Tale corrispondenza è un'applicazione lineare dello spazio vettoriale \mathfrak{V} , lo spazio delle classi di equivalenza degli esponenti locali di G su \mathfrak{B}^* . Quindi, per un gruppo di Lie G la dimensione di \mathfrak{V} è $h^* = h_1 - h_2$.

I principali risultati sugli esponenti locali dei gruppi di Lie possono essere riassunti nel seguente teorema:

Teorema 4.7 (Teorema di Bargmann).

- 1) Su un gruppo di Lie G ogni esponente locale $\xi(r, s)$ è equivalente ad un esponente locale canonico $\xi'(r, s)$ che, su un qualche intorno canonico \mathcal{N} , è analitico nelle coordinate di r, s e si annulla se r, s appartengono allo stesso sottogruppo locale ad un parametro. Due esponenti canonici sono equivalenti se e solo se $\xi' = \xi + \Delta[\Lambda]$ su un qualche intorno canonico locale, dove $\Lambda(r)$ è una forma lineare nelle coordinate canoniche di r .
- 2) Ad ogni esponente canonico locale di G corrisponde un unico esponente infinitesimo $\Xi(a, b)$ dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di G , cioè una forma bilineare antisimmetrica che soddisfa l'identità

$$\Xi([a, a'], a'') + \Xi([a', a''], a) + \Xi([a'', a], a') = 0$$

La corrispondenza è lineare.

- 3) Due esponenti locali canonici ξ, ξ' sono equivalenti se e solo se lo sono i corrispondenti Ξ, Ξ' , cioè se $\Xi'(a, b) = \Xi(a, b) - \Lambda([a, b])$, dove $\Lambda(a)$ è una forma lineare in \mathfrak{g} .
- 4) Esiste una corrispondenza lineare uno-a-uno tra le classi di equivalenza degli esponenti locali di G e le classi di equivalenza degli esponenti infinitesimi di \mathfrak{g} .

Un criterio di equivalenza per gli esponenti locali

Si suppone che, su un qualche intorno \mathcal{N} , ξ_1 e ξ_2 esponenti locali di un certo gruppo G siano di classe C^2 , ovvero con derivate parziali continue fino al secondo ordine, e sia ξ un esponente canonico locale equivalente alla differenza $\eta = \xi_2 - \xi_1$, così che su un certo \mathcal{N}_1 $\eta = \xi + \Delta[\zeta]$ con ξ e ζ anch'esse di classe C^2 . Così ζ può essere scelta in maniera tale che

$$\frac{\partial \zeta(0)}{\partial \rho^i} = 0$$

Sia H il gruppo locale costruito a partire da ξ . Per la (4.21), η è introdotto dalla trasformazione

$$\begin{aligned} \rho'^0 &= \rho^0 - \zeta(r) \\ \rho'^i &= \rho^i \end{aligned}$$

Segue che le costanti di struttura $\bar{c}_{ij}^0 = \beta_{ij}$ mantengono la loro forma (4.51) se si sostituisce η con ξ . Poiché $\eta = \xi_2 - \xi_1 \equiv \xi$, e che per il Lemma 4.9 $\xi \equiv 0$ se e solo se la (4.53) è vera, si ottiene il seguente criterio:

ξ_1, ξ_2 , esponenti locali di G della classe C^2 , sono equivalenti se e solo se, per λ_m costanti opportune,

$$\left(\frac{\partial^2(\xi_1 - \xi_2)}{\partial \rho^i \partial \sigma^j} - \frac{\partial^2(\xi_1 - \xi_2)}{\partial \rho^j \partial \sigma^i} \right)_{\rho^k = \sigma^k = 0} = \sum_{m=1}^n c^m_{ij} \lambda_m \quad (4.55)$$

Generatori infinitesimi di una rappresentazione proiettiva

1) *Osservazioni preliminari.* Sia V_r ($r \in L$) una rappresentazione unitaria strettamente continua di un qualche gruppo di Lie L sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} . Un sottogruppo ad un parametro $r(\tau)$ generato dall'elemento b dell'algebra \mathfrak{l} di L ($r(\tau) = e^{i b \tau}$ nella notazione di Chevalley) è, per il teorema di Stone, rappresentato da $V(\tau) = e^{-i \tau B_b}$, dove B_b è un operatore autoaggiunto (in generale non-limitato). B_b può essere detto il generatore infinitesimo del gruppo ad un parametro degli operatori $V(\tau)$. Garding ha mostrato che esiste un fissato insieme lineare di vettori denso in \mathcal{H} , detto \mathcal{D} , che è contenuto nel dominio di tutti i B_b e di tutti i loro prodotti finiti. Segue, dai suoi risultati, che, su \mathcal{D} :

$$B_{(\lambda b + \lambda' b')} = \lambda B_b + \lambda' B_{b'}; \quad B_b B_{b'} - B_{b'} B_b = i B_{[b, b']} \quad (4.56)$$

2) Si considera, ora, una rappresentazione proiettiva \mathcal{R}_r di un gruppo di Lie G connesso e semplicemente connesso, e sia U_r un insieme ammissibile di rappresentanti per tutto il gruppo. Allora gli operatori $W(\theta, r) =$

$e^{i\theta} U_r$ forniscono una rappresentazione del gruppo H . Quindi esistono $(n+1)$ generatori infinitesimi A_0, A_1, \dots, A_n che corrispondono alla base $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ dell'algebra di Lie \mathfrak{h} di H . In particolare $A_0 = -1$. Dalle (4.56) e (4.50) segue che:

$$A_k A_l - A_l A_k = i \sum_{m=1}^n c^m_{kl} A_m - i \beta_{kl} \cdot I$$

su un qualche \mathcal{D} su \mathcal{H} . La stretta analogia con le regole di commutazione quantistiche è evidente ed è stata esaminata in particolare da Weyl. Se G è un gruppo abeliano bidimensionale, e se si pone $P = A_1, Q = A_2$, e si assume $\beta_{12} = 1$, si trova $PQ - QP = -i \cdot I$.

4.2.3 Estensione degli esponenti locali di un gruppo di Lie

Per concludere la discussione teorica si presenta un ultimo teorema, con il quale siamo in grado di estendere qualsiasi esponente (fattore) di fase locale, ovvero definito su un dato intorno \mathcal{N}_0 dell'identità $e \in G$, in uno su tutto il gruppo:

Teorema 4.8.

Sia G un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso. Allora per ogni esponente locale ξ di G esiste un esponente ξ_0 di G , definito su tutto il gruppo, che è un'estensione di ξ . Se ξ è differenziabile, ξ_0 può essere scelto differenziabile.

Dimostrazione. Poiché l'interesse non è più nelle proprietà locali del gruppo G e dei suoi esponenti, verranno utilizzati i risultati generali sui gruppi di Lie.

- 1) Sia $\hat{\xi}$ un esponente locale canonico di G e sia H il gruppo locale di Lie formato da $\hat{\xi}$ dalla (4.20). Esiste un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso H_1 che è localmente isomorfo ad H su un qualche intorno \mathcal{M} su H . Gli elementi di H_1 saranno indicati da \bar{r} , e su \mathcal{M} possono essere identificati con gli elementi di H , così che H forma una parte di H_1 .
- 2) Gli elementi $\{\theta, e\}$ di H formano un sottogruppo locale centrale ad un parametro T tale che H/T è localmente isomorfo con G , mentre l'omomorfismo di H in G è definito da

$$g(\bar{r}) = g(\theta, r) = r, \quad \bar{r} \in \mathcal{M}, r \in G \quad (4.57)$$

Il sottogruppo locale T può essere esteso ad un sottogruppo centrale ad un parametro T_1 di H_1 che è connesso e semplicemente connesso [16]. Così gli elementi di T_1 sono della forma $\bar{t}(\theta)$ ($-\infty < \theta < \infty$), dove $\bar{t}(\theta)$ è una funzione analitica di θ (in ogni coordinata analitica su H_1), $\bar{t}(\theta)\bar{t}(\theta') = \bar{t}(\theta + \theta')$, e $\bar{t}(\theta) \neq \bar{t}(\theta')$ se $\theta \neq \theta'$. L'isomorfismo locale di H/T con G si estende ad un isomorfismo di H_1/T_1 con G , in accordo con l'omomorfismo locale (4.57):

$$g_1(\bar{r}) = r, \quad \bar{r} \in H_1, r \in G \quad (4.58)$$

Se \mathcal{M} è opportunamente scelto, $g_1(\bar{r}) = g(\bar{r})$ su \mathcal{M} . Inoltre

$$g_1(\bar{r}) = g_1(\bar{r}') \Rightarrow \bar{r}' = \bar{t}(\theta)\bar{r} = \bar{r}\bar{t}(\theta) \quad (4.59)$$

con un θ unicamente determinato.

Si assume \mathcal{M} sferico ($|\bar{r}| < \kappa$), con \mathcal{N} l'intorno sferico $|r| < \kappa$ su G , e si definisce un'applicazione di \mathcal{N} in \mathcal{M}

$$\bar{h}(r) = \{0, r\}, \quad r \in \mathcal{N} \quad (4.60)$$

Chiaramente $g(\bar{h}(r)) = r$ se $r \in \mathcal{N}$.

- 3) Gli insiemi aperti $r\mathcal{N}$, costituiti dai prodotti rs con $s \in \mathcal{N}$, coprono il gruppo G e quindi si può scegliere una sequenza r_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) tale che $r_k\mathcal{N}$ copra G . Senza perdere in generalità si può assumere $r_0 = e$ e $r_{k+1}\mathcal{N}$ non contenuto nell'unione $\mathfrak{U}_k = r_0\mathcal{N} \cup r_1\mathcal{N} \cup \dots \cup r_k\mathcal{N}$. Sia $\mathcal{L}_0 = \mathcal{N}$, e sia $r_k\mathcal{L}_k = \mathfrak{U}_k - \mathfrak{U}_{k-1}$ ($k \geq 1$), dove \mathcal{L}_k è un insieme non vuoto contenuto in \mathcal{N} . Gli insiemi $r_k\mathcal{L}_k$ ($k = 0, 1, \dots$) sono disgiunti e coprono G .

Si seleziona una sequenza \bar{r}_k ($k = 0, 1, \dots$) in H_1 tale che $\bar{r}_0 = \bar{e}$, e $g_1(\bar{r}_k) = r_k$. Si definisce un'applicazione \bar{h}_1 di G in H_1 come segue: se $r \in r_k\mathcal{L}_k$

$$\bar{h}_1(r) = \bar{r}_k\bar{h}(r'), \quad r' = r_k^{-1}r \in \mathcal{L}_k \subset \mathcal{N}$$

Si noti che $\bar{h}_1(r) = \bar{h}(r)$ se $r \in \mathcal{N}$ e che per tutti gli r

$$g_1(\bar{h}_1(r)) = g_1(\bar{r}_k)g_1(\bar{h}(r')) = r_k g(\bar{h}(r')) = r_k r' = r$$

Segue che $g_1(\bar{h}_1(r)\bar{h}_1(s)) = g_1(\bar{h}_1(r))g_1(\bar{h}_1(s)) = rs = g_1(\bar{h}_1(rs))$. Così, dalla (4.59)

$$\bar{h}_1(r)\bar{h}_1(s) = \bar{t}(\xi_1(r, s))\bar{h}_1(rs) \quad (4.61)$$

Qui $\xi_1(r, s)$ è una funzione a valori reali, unicamente definita per tutti gli $r, s \in G$, con la seguente proprietà:

$$\xi_1(r, s) = \hat{\xi}(r, s), \quad r, s \in \mathcal{N}_1 \quad (4.62)$$

dove \mathcal{N}_1 è un intorno fissato su G scelto in maniera tale che $\mathcal{N}_1^2 \subset \mathcal{N}$. Quindi, dalla (4.62) e dalla legge associativa per $\bar{h}_1(r)$, seguono:

$$\xi_1(e, e) = 0 \quad (4.63a)$$

$$\xi_1(r, s) + \xi_1(rs, t) = \xi_1(s, t) + \xi_1(r, st) \quad (4.63b)$$

Così ξ_1 soddisfa alle relazioni che definiscono un esponente su G , anche se, in generale, è discontinuo.

- 4) Il prossimo passo consiste nel sostituire ξ_1 con un esponente ξ_1'' differenziabile (in ogni coordinata analitica in H_1). Si può mostrare che $\xi_1(r, s)$ è

(a) misurabile rispetto alle misure invarianti su G ;

(b) limitato su ogni insieme compatto.

Ciò è vero se ξ_1 è considerata come funzione a due variabili di r ed s , ad anche se $\xi(r, s)$ è considerata come funzione della sola r (od s) per s (od r) fissato. Quindi si può definire $\xi_1''(r, s)$ dalle equazioni (4.36), (4.37) e (4.40), sostituendo ξ con ξ_1 , per tutti gli r, s (ovvero senza restringere r, s ad intorni di e). Infatti gli integrali nelle (4.36) e (4.37) sono finiti (poiché sono estesi su insiemi compatti), e le funzioni $\zeta, \xi_1', \zeta', \xi_1''$ hanno tutte le proprietà (4a) e (4b). Così, dalla (4.40)

$$\xi_1''(r, s) = \xi_1(r, s) + \Delta_{r,s}[\zeta''] \quad (4.64a)$$

soddisfa alle relazioni (4.63) ed è differenziabile su tutto il gruppo G , cioè ξ_1'' è un esponente differenziabile di G . Su un intorno sufficientemente piccolo \mathcal{N}' abbiamo, dalla (4.62),

$$\xi_1''(r, s) = \hat{\xi}(r, s) + \Delta_{r,s}[\zeta''] \quad (4.64b)$$

e $\zeta''(r)$ è differenziabile per $r \in \mathcal{N}'^2$.

- 5) Sia, ora, ξ un esponente locale di G , e sia $\hat{\xi}$ un esponente locale canonico equivalente a ξ , così che su \mathcal{N}'

$$\hat{\xi} = \xi + \Delta[\hat{\zeta}] \quad (4.65)$$

e $\hat{\zeta}$ è una funzione differenziabile su \mathcal{N}' , se ξ è differenziabile (Lemma 4.4).

Si assume \mathcal{N}' intorno sferico, $|r| < \kappa'$ e si definisce \mathcal{N}'_i ($i = 1, 2$) come $|r| < \kappa'_i$, con $\kappa'_1 < \kappa'_2 < \kappa'$. Si sceglie quindi la funzione $\psi(r)$, con $r \in G$, con le seguenti proprietà:

- (i) $\psi(r)$ è differenziabile su tutto G ;
- (ii) $\psi(r) = 1$ se $r \in \mathcal{N}'_1$;
- (iii) $\psi(r) = 0$ se r è fuori da \mathcal{N}'_2 .

Un'opportuna estensione di ξ la si può ottenere dalla (4.64a) ponendo

$$\xi_0(r, s) = \xi''_1(r, s) - \Delta_{r,s}[\zeta_0] \quad (4.66a)$$

$$\zeta_0(r) = \begin{cases} \psi(r)(\hat{\zeta} + \zeta''(r)) & r \in \mathcal{N}' \\ 0 & r \notin \mathcal{N}' \end{cases} \quad (4.66b)$$

Infatti, ζ_0 è sempre continua, ed è differenziabile su tutto il gruppo se ξ (e quindi $\hat{\zeta}$) è differenziabile su \mathcal{N}' . Comunque, dalle (4.64b), (4.65), (4.66a) e dalla definizione di ψ , $\xi_0 = \xi$ su un intorno sufficientemente piccolo. Così ξ_0 è un esponente di G che è un'estensione dell'esponente locale ξ , e ξ_0 è differenziabile se lo è ξ . Ciò conclude la dimostrazione del Teorema 4.8.

Osservazioni.

- La connessione semplice è essenziale per la validità del teorema. Nel caso di un gruppo abeliano G compatto e connesso, ad esempio, solo un esponente locale equivalente a zero può essere esteso ad un esponente di G , mentre l'insieme \mathfrak{B} delle classi di equivalenza degli esponenti locali ha dimensione $\frac{1}{2}n(n-1)$, dove n è la dimensione di G .
- Per il Lemma 4.8, un esponente canonico di G è analitico in un qualche intorno dell'identità. Il teorema, comunque, asserisce solo l'esistenza di un esponente ξ differenziabile, non di un'estensione analitica. Infatti, è semplice costruire esempi di esponenti locali canonici (per un G opportuno) che non hanno estensioni analitiche.

4.2.4 Derivazione delle rappresentazioni proiettive di un dato gruppo G

Si suppone il gruppo G connesso e che soddisfa alle condizioni (vere per i gruppi di Lie) necessarie per la costruzione del suo gruppo coprente G^* . G^* è semplicemente connesso; G è localmente isomorfo a G^* ed isomorfo con il

gruppo fattore G^*/N , dove N è un sottogruppo centrale invariante e discreto⁷ di G^* . $G^* = G$ se e solo se G stesso e semplicemente connesso.

L'isomorfismo locale di G e G^* implica che, su un opportuno intorno dell'identità i fattori (o gli esponenti) locali di G e G^* coincidano per gli elementi isomorfi di G e G^* .

Dall'isomorfismo di G e G^*/N segue che ogni rappresentazione (proiettiva) di G è allo stesso tempo una rappresentazione (proiettiva) del gruppo coprente G^* . Per trovare le rappresentazioni proiettive di G è sufficiente quindi selezionare quelle rappresentazioni proiettive che associano ad ogni elemento di N un raggio unitario.

Il vantaggio di trattare con G^* piuttosto che con G è principalmente basato sul fatto che i risultati delle sezioni precedenti si applicano al gruppo semplicemente connesso G^* ma, in generale, non al gruppo G stesso.

Nel caso di un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso, dal Teorema 4.8, ogni esponente locale può essere esteso ad un esponente globale. Pertanto i passi necessari per la determinazione di tutte le rappresentazioni proiettive di un dato gruppo G di Lie sono:

1. Sia G^* il gruppo coprente di G e sia $\pi : G^* \rightarrow G$ un'applicazione coprente con nucleo $N \equiv \ker(\pi)$. Se $\alpha : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ ⁸ è una rappresentazione di G , allora

$$\alpha \circ \pi \equiv \alpha^* : G^* \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) \quad (4.67a)$$

e verifica la condizione:

$$\alpha_r^* = U_r, \quad \forall r \in N \quad (4.67b)$$

D'altra parte, ogni applicazione di G^* in $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ che verifica la (4.67b), determina un'applicazione di G attraverso la (4.67a). In accordo con il teorema di Wigner, l'applicazione α^* è indotta dalla rappresentazione proiettiva unitaria irriducibile $V : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ per cui:

$$V_r = \lambda \cdot U_r, \quad \forall r \in \ker(\pi) \quad (4.68)$$

che è equivalente alla condizione (4.67b), e dove $|\lambda| = 1$:

$$G^* \xrightarrow{\pi} G \xrightarrow{\alpha} \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

Quindi le rappresentazioni proiettive di G^* che verificano alla (4.68) inducono le rappresentazioni proiettive di G . Si devono, così, semplicemente determinare tutte le rappresentazioni proiettive unitarie irriducibili del gruppo G^* che verificano la (4.68).

⁷Vedi Definizioni A.13, A.7, 1.2 rispettivamente per i sottogruppi centrali, invarianti e discreti

⁸ $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ è il gruppo degli operatori unitari in \mathcal{H}

2. Si determina il gruppo locale (*coomologico*) $H^2(G^*, \mathbb{R})$ utilizzando argomenti infinitesimi. Ciò è possibile, poiché per i gruppi di Lie connessi e semplicemente connessi $H^2(G^*, \mathbb{R}) \cong H^2(\mathfrak{g}^*, \mathbb{R})$.
3. Si determinano da $H^2(G^*, \mathbb{R})$ i fattori di fase. Si seleziona, poi, un fattore di fase da ogni classe di coomologia e si cerca di classificare le rappresentazioni unitarie irriducibili di G^* attraverso quelle unitarie continue del gruppo coomologico della forma (4.26a); successivamente si selezionano quelle che verificano la condizione (4.68), ovvero quelle rappresentazioni proiettive che associano N con raggi unitari.

In alternativa, laddove è possibile, si può partire dalla determinazione degli esponenti locali ξ di G (o del suo gruppo coprente G^*) e delle loro classi distinte di equivalenza e da qui costruire i rispettivi gruppi coomologici e quindi ricavare le rappresentazioni proiettive di G attraverso le rappresentazioni unitarie continue della forma (4.26a).

Nel caso in cui il gruppo $G = G_1 \times G_2$, ovvero nel caso in cui il gruppo G sia il prodotto diretto di due gruppi G_1, G_2 , allora vale il seguente teorema:

Teorema 4.9.

Date due rappresentazioni proiettive $\mathcal{U}_{G_1}, \mathcal{U}_{G_2}$ con fattori di fase $\omega_1(r_1, s_1), \omega_2(r_2, s_2)$ rispettivamente, con $r_i, s_i \in G_i$ ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} U_{r_1} U_{s_1} &= \omega_1(r_1, s_1) U_{r_1 s_1}, & U_{[r, s]_1} &\in \mathcal{U}_{G_1} \\ U_{r_2} U_{s_2} &= \omega_2(r_2, s_2) U_{r_2 s_2}, & U_{[r, s]_2} &\in \mathcal{U}_{G_2} \end{aligned}$$

allora il loro prodotto diretto

$$\mathcal{U}_G = \mathcal{U}_{G_1} \times \mathcal{U}_{G_2}, \quad G = G_1 \times G_2 \quad (4.69)$$

è una rappresentazione proiettiva con fattore di fase

$$\omega(r, s) = \omega_1(r_1, s_1) \omega_2(r_2, s_2) \quad (4.70)$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si utilizza la nota relazione:

$$(A \times B)(C \times D) = AC \times BD$$

Dalla (4.69):

$$\begin{aligned} U_r U_s &= (U_{r_1} \times U_{r_2})(U_{s_1} \times U_{s_2}) = U_{r_1} U_{s_1} \times U_{r_2} U_{s_2} = \\ &= \omega_1(r_1, s_1) \omega_2(r_2, s_2) U_{r_1 s_1} \times U_{r_2 s_2} = \\ &= \omega_1(r_1, s_1) \omega_2(r_2, s_2) U_{rs} \end{aligned}$$

ottenendo così la (4.70) e quindi la dimostrazione del Teorema 4.9.

Ovviamente i risultati del teorema valgono tanto su tutto il gruppo, se G , G_1 , G_2 sono tutti connessi e semplicemente connessi, altrimenti su intorni \mathcal{N} , \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 opportunamente scelti, rispettivamente dell'identità e di G , e_1 di G_1 , e_2 di G_2 .

In aggiunta vale il seguente corollario, che definisce un gruppo locale (covariante) più generale (è la generalizzazione del Teorema 10.16 su [25] proposta da Grigore [42]):

Corollario 4.3.

Siano m_0, \dots, m_p moltiplicatori di un gruppo G e sia $U (g \rightarrow U_g)$ una rappresentazione di G in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} (separabile) sui numeri complessi. Sia $G_{m_0, \dots, m_p} = G \times \underbrace{T \times \dots \times T}_{(p+1) \text{ volte}}$ (dove T è l'insieme dei numeri complessi

di modulo 1 preso come gruppo moltiplicativo) con la seguente legge di composizione:

$$(g; \zeta_0, \dots, \zeta_p) \cdot (g'; \zeta'_0, \dots, \zeta'_p) = (gg'; \zeta_0 \zeta'_0 m_0(g, g'), \dots, \zeta_p \zeta'_p m_p(g, g')) \quad (4.71)$$

Allora G_{m_0, \dots, m_p} è un gruppo e

$$(g; \zeta_0, \dots, \zeta_p) \rightarrow V_{g, \zeta_0, \dots, \zeta_p} \equiv \zeta_0^{-1} \dots \zeta_p^{-1} U_g \quad (4.72)$$

è una rappresentazione di G_{m_0, \dots, m_p} in \mathcal{H} tale che

$$V_{e, \zeta_0, \dots, \zeta_p} = \zeta_0^{-1} \dots \zeta_p^{-1} I \quad (4.73)$$

D'altra parte, se V è una rappresentazione di G_{m_0, \dots, m_p} in \mathcal{H} tale che (4.73) è verificata, allora se

$$U_g \equiv V_{g; \underbrace{1, \dots, 1}_{(p+1) \text{ volte}}}$$

$g \rightarrow U_g$ è una rappresentazione di G in \mathcal{H} e la (4.72) è vera.

Nel caso di prodotto semidiretto, e non di prodotto diretto, si può seguire la seguente procedura:

Sia $H \times_t A$ un prodotto semidiretto tra i gruppi localmente compatti H , A , che verifica il secondo assioma della contabilità. Si suppone A abeliano. Qui $t : H \rightarrow \text{Aut}(A)$ è un omomorfismo. Per classificare tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili di $H \times_t A$ si compiono i passi seguenti:

(a) Si considera il duale \hat{A} di A e l'azione di H su esso data da:

$$(h \cdot \omega)(a) \equiv \omega(t_{h^{-1}}(a)) \quad (4.74)$$

(b) Si calcolano tutte le H -orbite⁹ in \hat{A} . Si suppone l'esistenza di una sezione incrociata di Borel $\Sigma \subset \hat{A}$ che interseca una sola volta ogni H -orbita.

(c) $\forall \omega \in \Sigma$ si individua il **piccolo gruppo**:

$$H_\omega = \{h \in H \mid h \cdot \omega = \omega\} \quad (4.75)$$

(d) Si suppone di conoscere la lista completa di tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili di H_ω , $\forall \omega \in \Sigma$.

(e) Sia $\mathcal{O} \subset \hat{A}$ una H -orbita in \hat{A} , $\omega_0 \equiv \mathcal{O} \cap \Sigma$ e π una rappresentazione unitaria irriducibile di H_{ω_0} che agisce sullo spazio di Hilbert (complesso) \mathcal{H} . Si può associare ad ogni π un cociclo ϕ^π , ovvero un'applicazione di Borel $\phi^\pi : H \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, tale che, $\forall h, h_1, h_2 \in H_{\omega_0}$:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \phi^\pi(e, \omega) = 1 \\ \text{(ii)} \quad & \phi^\pi(h_1, h_2 \cdot \omega) \phi^\pi(h_2, \omega) = \phi^\pi(h_1 h_2, \omega) \\ \text{(iii)} \quad & \phi^\pi(h, \omega) \text{ è continua in } h \text{ ed in } \omega \end{aligned} \quad (4.76a)$$

e $\forall h \in H_{\omega_0}$:

$$\pi(h) = \phi^\pi(h, \omega_0) \quad (4.76b)$$

Un buon modo per costruire ϕ^π è il seguente: sia $c : \mathcal{O} \rightarrow H$ una sezione di Borel, ovvero un'applicazione di Borel tale che $\forall \omega \in \mathcal{O}$

$$c(\omega_0) = e, \quad c(\omega) \cdot \omega_0 = \omega \quad (4.76c)$$

Allora

$$\phi^\pi(h, \omega) = \pi(c(h \cdot \omega)^{-1} h c(\omega)) \quad (4.76d)$$

⁹Siano X uno spazio di Borel e G un gruppo di Borel separabile. Si dirà che X è un **G -spazio** se per ogni $g \in G$ esiste un automorfismo di Borel $t_g (x \rightarrow g \cdot x)$ di X tale che

i) t_e è l'identità;

ii) $t_{g_1 g_2} = t_{g_1} t_{g_2}$, $g_1, g_2 \in G$.

X è detto **G -spazio di Borel** se l'applicazione $(g, x) \rightarrow g \cdot x$ di $G \times X$ in X è di Borel. Si dirà che X è un **G -spazio di Borel standard** se X è un G -spazio di Borel e se la struttura i Borel di X è *standard*. Per ogni G -spazio X e per ogni $x \in X$, l'insieme

$$G_x = \{g : g \in G, g \cdot x = x\}$$

è un sottogruppo di G . È detto **sottogruppo di stabilità** in x . L'insieme

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$$

è detto orbita di X . Se $y = hx$ ($h \in G$), allora $G_y = h \cdot G_x \cdot h^{-1}$ è semplicemente verificata. [25]

- (f) Per ogni H -orbita \mathcal{O} e per ogni rappresentazione unitaria irriducibile π di H_{ω_0} in \mathcal{H} si considera lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} \equiv L^2(\mathcal{O}, d\alpha, \mathcal{H})$ (dove α è una misura quasi- H -invariante su \mathcal{O}) e si definisce $\mathscr{W}_{h,a}^{(\mathcal{O},\pi)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ come segue:

$$\left(\mathscr{W}_{h,a}^{(\mathcal{O},\pi)} f\right)(\omega) = \omega(a) \left(r_h(h^{-1} \cdot \omega)\right)^{\frac{1}{2}} \phi^\pi(h, h^{-1} \cdot \omega) f(h^{-1} \cdot \omega) \quad (4.77)$$

Allora \mathscr{W} è una rappresentazione unitaria irriducibile di $H \times_t A$. Da queste si determinano le eventuali rappresentazioni proiettive.

4.2.5 Il carattere delle rappresentazioni proiettive

Nella determinazione delle rappresentazioni proiettive è però utile anche calcolare il carattere della rappresentazione stessa. Essendo il carattere proiettivo differente dal carattere di una rappresentazione ordinaria, in questa sezione verranno dati gli strumenti essenziali per calcolare un carattere proiettivo ([26, 36]).

Sia G un gruppo, F un campo arbitrario (ad esempio i complessi) e sia $\omega \in Z^2(G, F^*)$, ovvero sia ω un cociclo di G a valori in F^* (definito a partire dall'azione di G su F^*). Un'applicazione $f : G \rightarrow F$ è detta **funzione di classe** se

$$f(r) = f(s^{-1}rs), \quad \forall r, s \in G$$

Si sa che se $\chi : G \rightarrow F$ è il carattere di una rappresentazione ordinaria di G , allora χ è una funzione di classe. Ciò, però, non è più vero per i caratteri delle rappresentazioni proiettive (*caratteri proiettivi*). Infatti, dati $r, s \in G$, il carattere $\chi(r)$ sarà dato da:

$$\chi(r) = \omega(r, s)\omega(s, s^{-1}rs)^{-1}\chi(s^{-1}rs) \quad (4.78)$$

dove ω è il moltiplicatore della rappresentazione proiettiva di G .

Sia $R(G)$ una rappresentazione proiettiva con moltiplicatore ω , tale che χ è il carattere di R . Poiché per ogni $r, s \in G$

$$\omega(r, s)^{-1}R(r)R(s) = R(s(s^{-1}rs)) = \omega(s, s^{-1}rs)R(s)R(s^{-1}rs)$$

segue che

$$R(s)^{-1}R(r)R(s) = \omega(r, s)\omega(s, s^{-1}rs)^{-1}R(s^{-1}rs)$$

ed applicando la traccia ad ambo i lati di quest'ultima uguaglianza si ottiene la (4.78).¹⁰

¹⁰Si può ottenere lo stesso risultato partendo da

$$\chi(r_i^g) = \omega(r, r_i r^{-1})^{-1}\omega(r_i, r^{-1})^{-1}\omega(r, r^{-1})\chi(r_i)$$

Dato un gruppo G ed un campo F (ad esempio i reali), vediamo alcune proprietà interessanti ed utili dei caratteri proiettivi:

- Siano $R_\omega(G) : G \rightarrow \text{GL}(V)$, $R_\phi(G) : G \rightarrow \text{GL}(W)$ due rappresentazioni proiettive di G con moltiplicatori ω , ϕ rispettivamente. Se χ_ω , χ_ϕ sono i caratteri di U_ω , U_ϕ rispettivamente, allora l'applicazione

$$\chi_\omega \chi_\phi : G \rightarrow F$$

definita da

$$(\chi_\omega \chi_\phi)(r) = \chi_\omega(r) \chi_\phi(r), \quad \forall r \in G$$

è il carattere del prodotto tensoriale $R_\omega \otimes R_\phi$.

- Se due rappresentazioni proiettive di un dato gruppo G sono linearmente equivalenti con ω moltiplicatore, allora hanno lo stesso carattere.
- Siano $\omega, \phi \in Z^2(G, F^*)$ coomologhi, ovvero $\phi = \omega(\delta t)$ per un qualche $t : G \rightarrow F$ con $t(1) = 1$. Dato un carattere proiettivo di G su F , si definisce $\chi' : G \rightarrow F$ come

$$\chi'(r) = t(r) \chi(r), \quad \forall r \in G \quad (4.79)$$

Allora l'applicazione $\chi \rightarrow \chi'$ è biettiva e tale che χ è irriducibile se e solo se lo è anche χ' .

- Sia H un sottogruppo di G e sia χ un suo carattere proiettivo, ω moltiplicatore. Allora, per ogni $r \in G$ ed $h \in rHr^{-1}$

$$\chi(h) = \omega(h, r) \omega(r, r^{-1}hr) \chi(r^{-1}hr) \quad (4.80)$$

Dato un elemento r_i , si definisce, per ogni $r \in G$, r_i^r come

$$r_i^r = r r_i r^{-1} \quad (4.81)$$

ed è un elemento della classe di r_i , $C(r_i)$.

- Si assume $\omega \in Z^2(G, F^*)$ cociclo normale¹¹; sia, quindi, χ un carattere proiettivo di H sottogruppo di G con moltiplicatore ω e sia $C(r)$ la classe di coniugazione di G contenente r . Allora

$$\chi(s) = \chi(t^{-1}st), \quad \forall s \in H \cap C(r), t \in H \quad (4.82)$$

utilizzando le (4.12) e (4.13).

(S.L.Altmann, *Induced representations in crystals and molecules*, 1977, e [26])

¹¹Sia G un gruppo che risulta essere prodotto semidiretto di un sottogruppo normale N e di un sottogruppo H . Allora ogni elemento r di G sarà unicamente rappresentato nella forma $r = nh$, con $n \in N$, $h \in H$. Si dice che un cociclo $\alpha \in Z^2(G, F)$ è **normale** se $\alpha(n, h) = 1$, per ogni $n \in N$, $h \in H$. [34]

4.3 Conclusioni

L'importanza delle rappresentazioni proiettive in fisica viene fornita innanzitutto dal teorema di Wigner, secondo il quale ogni rappresentazione quantistica di un gruppo G è, in generale, una rappresentazione proiettiva: si parlerà di rappresentazione ordinaria o unitaria quando l'esponente di fase della rappresentazione proiettiva è equivalente a 0:

$$\xi(r, s) \equiv 0$$

Essendo l'esponente di fase un bi-cociclo (vedi (e) a pag.110) particolare legato alla rappresentazione proiettiva di un dato gruppo G , dai risultati di Varadarajan [25, Teoremi 9.7 e 9.11] si può concludere che, quando per il gruppo G esiste una rappresentazione proiettiva, allora è possibile definire un sistema di imprimitività e quindi tale sistema possiede la proprietà della localizzabilità (4.2).

Nel corso del capitolo viene, quindi, presentata la teoria delle rappresentazioni proiettive proposta da Bargmann nel 1954 [7]. A questa vengono aggiunti i contributi di Grigore, Varadarajan, Simms per la determinazione delle rappresentazioni proiettive di un dato gruppo di Lie G [42, 19, 25] e che sarà utile nella determinazione delle rappresentazioni proiettive del gruppo di Galileo nel caso generale in 2 dimensioni (Sezione 5.4.5), ed il contributo di Karpilowski nella determinazione del carattere di una rappresentazione proiettiva [34, 36], che verrà utilizzato anch'esso nel caso del gruppo di Galileo.

Per quel che riguarda i gruppi abeliani (Sezione 5.1) e delle trasformazioni pseudo-ortogonali (Sezione 5.2), vengono sfruttate l'analiticità dell'esponente di fase e la relazione di equivalenza tra quest'ultimo e l'esponente infinitesimo definito sull'algebra del gruppo. I risultati ricavati dallo studio su tali gruppi verranno poi sfruttati nello studio del gruppo di Galileo (Sezione 5.4).

Per il gruppo delle rotazioni (Sezione 5.3) si sfrutta, invece, il fatto che una rappresentazione proiettiva del gruppo coprente G^* di un dato gruppo di Lie G induce una rappresentazione proiettiva nel gruppo stesso. Tale risultato può essere formulato come teorema:

Teorema 4.10.

Siano G un gruppo di Lie e G^* il suo corrispondente gruppo coprente. Se ogni rappresentazione proiettiva di G^* ammette un'estensione¹² $\tau : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, allora la determinazione delle rappresentazioni di G è equivalente alla determinazione delle rappresentazioni di G^* .

Una sua dimostrazione è presente su [19] (vedi anche il punto 1 nella derivazione delle rappresentazioni proiettive a pag.107).

¹² *lifting*

Capitolo 5

Implicazioni fisiche

Nel corso di questo capitolo verranno studiate alcune applicazioni della teoria delle rappresentazioni proiettive ad alcuni gruppi importanti per la fisica. Il primo esempio sarà dato dalla determinazione dell'esponente di fase per i gruppi abeliani [7], quindi si passerà allo studio dei gruppi delle trasformazioni pseudo-ortogonali, omogenee e non [7] (Sezioni 5.1 e 5.2).

L'esempio successivo (Sezione 5.3), il primo di diretta rilevanza con la fisica quantistica, è dato dallo studio delle rappresentazioni del gruppo delle rotazioni $SO(3)$: sfruttando il Teorema 4.10, si determinano le rappresentazioni del gruppo delle rotazioni a partire da quelle del suo gruppo coprente $SU(2)$, determinando la seconda regola di superselezione di Bargmann per lo spin (spin semi-intero \rightarrow rappresentazione proiettiva; spin intero \rightarrow rappresentazione unitaria) [26, 15, 4, 20].

Quindi si passa al corposo esame del gruppo di Galileo (Sezione 5.4). Innanzitutto, sfruttando i risultati ottenuti per i gruppi abeliani e delle trasformazioni pseudo-ortogonali, si determina l'esponente infinitesimo non nullo e quindi il corrispondente esponente di fase, e da questo tutti gli esponenti di fase non equivalenti, riottenendo la prima regola di superselezione di Bargmann legata alla massa (vedi nota 5 a pag.78). Successivamente si determina la rappresentazione proiettiva del gruppo di Galileo, con corrispondente esponente, quando si impone l'invarianza delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger sotto l'azione delle trasformazioni di tale gruppo (Sezione 5.4.3) [7].

Dai risultati ottenuti nello studio del gruppo delle trasformazioni pseudo-ortogonali ci si aspetta, applicando le trasformazioni di Galileo in spazi di dimensione spaziale inferiore (2 e 1 dimensioni), di trovare nuovi esponenti di fase aggiuntivi, oltre quello noto. Infatti, si andranno a studiare il gruppo di Galileo in $2+1$ dimensioni (Sezione 5.4.5), ricavandone due ulteriore esponenti di fase ed anche le rappresentazioni proiettive (di cui una valida anche nel caso generale in 3 dimensioni) e le espressioni dei generatori infinitesimi

[37, 38, 42], ed il gruppo di Galileo in $1 + 1$ dimensioni a tre parametri (Sezione 5.4.6), ricavandone, in questo caso, il fattore di fase, compatibile con un fattore di fase di un gruppo abeliano a tre parametri, e l'espressione dei generatori infinitesimi dipendenti dal tempo [40].

Nella penultima Sezione, la 5.5, si studierà l'equivalente relativistico del gruppo di Galileo, il gruppo di Poincaré, descrivendone le proprietà [24, 31], e proponendo un metodo per determinare l'esponente di fase del gruppo di Galileo a partire dal gruppo di Poincaré [39], che non presenta alcun esponente di fase non banale a parte quello indotto dalla rappresentazione proiettiva del gruppo delle rotazioni.

Nell'ultima Sezione, la 5.6, si propone la generalizzazione a dimensioni superiori dei generatori infinitesimi dipendenti dal tempo del gruppo di Galileo, estendendo l'approccio di Doebner e Mann. In questo caso si prendono in esame due particolari rappresentazioni di Galileo, ed a partire dai generatori infinitesimi che risultano dipendere dal tempo, si ricava una rappresentazione del gruppo di Galileo che anch'essa risulta dipendente dal tempo attraverso una fase $e^{-i(p|v)}$. Tale rappresentazione risulta essere proiettiva. In conclusione si propone anche un'interpretazione fisica sia dell'esponente di fase di Bargmann, sia di quest'ultimo esponente di fase.

5.1 Gruppi abeliani

Sia G un gruppo di Lie abeliano di dimensione n , connesso e semplicemente connesso; allora le coordinate canoniche ρ^k ($-\infty < \rho^k < +\infty$) possono essere introdotte su tutto il gruppo, così che le funzioni f^i si riducono a $f^i(r, s) = \rho^i + \sigma^i$. La moltiplicazione gruppale rs sarà, quindi, $rs = r + s$. Ogni forma bilineare antisimmetrica sull'algebra di Lie \mathfrak{g} è allora un esponente infinitesimo, e l'equivalenza degli esponenti infinitesimi si riduce all'uguaglianza. Un esponente canonico ξ soddisfa così alle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \xi(\tau_1 a, \tau_2 a) &= 0 \\ \xi(0, 0) &= 0 \\ \xi(r, s) + \xi(r + s, t) &= \xi(s, t) + \xi(r, s + t) \end{aligned} \tag{5.1a}$$

Su un intorno opportunamente scelto, ξ è analitico e può essere scritto come $\xi(r, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^{(m)}(r, s)$, dove $\xi^{(m)}$ è un polinomio omogeneo di ordine m nelle coordinate di r, s . Le (5.1a), pertanto, devono essere verificate da ciascun $\xi^{(m)}$ singolarmente: ogni $\xi^{(m)}$ è, così, un esponente locale canonico.

Esaminiamo le β_{ij} in (4.51):

$$\beta_{ij}^{(m)} = \left(\frac{\partial^2 \xi^{(m)}(r, s)}{\partial \rho^i \partial \sigma^j} - \frac{\partial^2 \xi^{(m)}(r, s)}{\partial \rho^j \partial \sigma^i} \right)_{\rho^k = \sigma^k = 0}$$

Sia $\xi^{(m)}(r, s) = \sum_{k,l=1}^n \sum_{t=0}^m a_t (\rho^k)^t (\sigma^l)^{m-t}$, dove ρ^k, σ^l sono rispettivamente le coordinate canoniche di r, s . Quindi:

$$\beta_{ij}^{(m)} = \sum_{kl} \sum_t a_t t(m-t) (\rho^k)^{t-1} (\sigma^l)^{m-t-1} (\delta_{ki} \delta_{lj} - \delta_{kj} \delta_{li}) \Big|_{\rho^k = \sigma^l = 0} \quad (5.1b)$$

È evidente che la (5.1b) si annulla sicuramente per $m \neq 2$: per $m < 2$ il polinomio è di primo grado e la sua derivata seconda è comunque nulla; per $m \geq 3$, invece, ci sarà sicuramente un t per cui $t-1 \neq 0$ e $m-t-1 \neq 0$ e quindi la (5.1b) si annulla per $\rho^k = \sigma^k = 0$. Per $m = 2$, invece, resta un'espressione del tipo:

$$\beta_{ij} = \sum_m \sum_{kl} a_1 (\delta_{ki} \delta_{lj} - \delta_{kj} \delta_{li})$$

che in generale non è necessariamente nulla. Quindi $\xi = \xi^{(2)}$.

Dalla (4.46b) segue che $\Xi(a, b) = 2\xi(a, b)$. Così:

$$\xi(r, s) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \beta_{ij} \rho^i \sigma^j \quad (5.1c)$$

5.1.1 Gruppo abeliano a due parametri

Sia G un gruppo di Lie abeliano a due parametri, sempre connesso e semplicemente connesso. Quindi, detti $r = (a_r, b_r)$, $s = (a_s, b_s)$, il loro prodotto sarà definito da $rs = (a_r + a_s, b_r + b_s)$. Dalla (5.1c) segue che l'esponente canonico definito su tutto il gruppo sarà del tipo:

$$\xi(r, s) = \frac{1}{2} (\beta_{12} a_r b_s + \beta_{21} a_s b_r), \quad \beta_{11} = \beta_{22} = 0$$

Per l'antisimmetria di β (e di ξ) segue, infine, che:

$$\xi(r, s) = \frac{\beta}{2} (a_r b_s - a_s b_r)$$

dove $\beta = \beta_{12} = -\beta_{21}$. Ciò spiega anche la presenza e la forma dell'esponente di fase nella (4.5a).

5.2 Gruppi pseudo-ortogonali

Sia $g_{ik}x^i x^k$ una forma quadratica reale non-singolare in m variabili x^i , con g^{ik} tensore simmetrico ($g^{ij}g_{kj} = \delta_k^i$). Una trasformazione lineare omogenea $x'^i = w^i_k x^k$, o $x' = Wx$, che lascia invariata $x_i x^i = g_{ik}x^i x^k$ sarà detta **pseudo-ortogonale**.

Per una scelta opportuna delle coordinate, g_{ik} è diagonale con elementi ± 1 . Allora

$$x_i x^i = \sum_{i=1}^p (x_i)^2 - \sum_{i=p+1}^m (x_i)^2$$

Il gruppo delle trasformazioni pseudo-ortogonali W sarà indicato, quindi, con G_p^m , con $G_p^m = G_{m-p}^m$ (g e $-g$ portano alle stesse trasformazioni).

Il *componente identità* di G_p^m , ovvero il componente connesso del gruppo che contiene l'identità, sarà indicato da $G_p'^m$. $W \in G_p'^m$ se ha determinante 1 e se il sottodeterminante di ordine p formato dagli elementi w^i_k nelle prime p righe e colonne è positivo.

Inoltre si considera il gruppo I_p^m delle trasformazioni pseudo-ortogonali non omogenee:

$$x'^i = w^i_k x^k + u^i, \quad \text{o } x' = Wx + u$$

Si indica con (W, u) un qualsiasi elemento di I_p^m . Se $x' = Wx + u$, $x'' = W'x' + u'$, allora $x'' = W'Wx + (W'u + u')$, segue quindi che il prodotto interno in I_p^m è definito da:

$$(W, u) \cdot (W', u') = (W'W, W'u + u') \quad (5.2a)$$

Segue da qui anche la rappresentazione matriciale di I_p^m che verifica il prodotto interno (5.2a):

$$Z(r) = \begin{pmatrix} W_r & u_r \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2b)$$

dove W è una matrice $m \times m$, u un vettore colonna di m componenti, 1 reale.

L'identità in I_p^m è $e = (1, 0)$, mentre l'inverso è $(W, u)^{-1} = (W^{-1}, -W^{-1}u)$. Inoltre il gruppo T_m delle traslazioni di elementi $(1, u)$ è un sottogruppo invariante abeliano di I_p^m , con $I_p^m/T_m \simeq G_p^m$.

Le dimensioni di G_p^m ed I_p^m sono rispettivamente $\frac{1}{2}m(m-1)$ ed $\frac{1}{2}m(m+1)$.

5.2.1 L'algebra di Lie di G_p^m , I_p^m

Se un gruppo di Lie G è rappresentato da matrici di ordine l , reali o complesse, $Z(r)$ tali che $Z(r)Z(s) = Z(rs)$, con $Z(e) = 1$, e gli elementi $Z(r)$ hanno derivate parziali continue rispetto alle coordinate ρ^k di r , l'algebra di Lie \mathfrak{g} di G è associata linearmente all'insieme delle combinazioni lineari $\sum_{h=1}^n \gamma^h K_h$, dove $K_h = \frac{\partial Z(e)}{\partial \rho^h}$ sono i generatori infinitesimi di $Z(r)$. Sia a_1, \dots, a_n la base standard di \mathfrak{g} . Allora $a_h \rightarrow K_h$ è:

$$a = \sum_{h=1}^n \gamma^h a_h \rightarrow \sum_{h=1}^n \gamma^h K_h = K_a \quad (5.3)$$

In particolare

$$[a, b] \rightarrow K_{[a,b]} = K_a K_b - K_b K_a \quad (5.4)$$

Se le matrici K_h sono linearmente indipendenti (rispetto a coefficienti reali), l'applicazione è uno a uno ed il commutatore $K_a K_b - K_b K_a$ determina $[a, b]$ e quindi le costanti di struttura.

Su un intorno \mathcal{N} dell'identità in G_p^m ed I_p^m si introducono le seguenti coordinate. Ogni matrice W sufficientemente vicina all'identità può essere unicamente rappresentata da $W = e^P = 1 + P + \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{3!}P^3 + \dots$, dove P è una matrice con elementi reali ρ^i_k con valore assoluto sufficientemente piccolo. $W \in G_p^m$ se e solo se

$$\rho^{ij} + \rho^{ji} = 0, \quad \rho^{ij} = g^{ik} \rho^i_k \quad (5.5)$$

In G_p^m le $\frac{1}{2}m(m-1)$ ρ^{ij} variabili, con $i < j$, possono essere prese come coordinate su \mathcal{N} ; in I_p^m a queste si devono aggiungere le m componenti di u . Le matrici K hanno così la forma:

$$\begin{array}{ll} M & \text{per } G_p^m \\ \left(\begin{array}{c} M \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) & \text{per } I_p^m \end{array} \quad (5.6)$$

M ha elementi $\mu^i_k = g_{kj} \mu^{ij}$, $\mu^{ij} + \mu^{ji} = 0$, k è un vettore arbitrario. In particolare $M^{(ij)}$ sarà la matrice per cui $\mu^{ij} = -\mu^{ji} = 1$, mentre il resto degli elementi è nullo, e $k^{(i)}$ il vettore di componenti $\kappa^j = \delta^j_i$, e $M^{(ii)} = 0$.

La base standard di \mathfrak{g} per G_p^m è costituita dagli $\frac{1}{2}m(m-1)$ vettori a_{ij} , con $i < j$, corrispondenti alle coordinate ρ^{ij} , cui si aggiungono le m coordinate del vettore b_i , corrispondenti alle coordinate u^i , per I_p^m . Quindi $a_{ii} = 0$, $a_{ij} = -a_{ji}$, con $i < j$; quindi, per tutte le combinazioni degli indici:

$$a_{ij} + a_{ji} = 0 \quad (5.7)$$

Allora la corrispondenza $a \rightarrow K_a$ è data da¹

$$a_{ij} \rightarrow M^{(ij)} \quad \text{per } G_p^m$$

$$a_{ij} \rightarrow \begin{pmatrix} M^{(ij)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & k^{(i)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{per } I_p^m \quad (5.8)$$

A questo punto, considerando le corrispondenze (5.3), (5.8), si possono calcolare i commutatori (parentesi di commutazione) dell'algebra di Lie \mathfrak{g} :

$$[a_{ij}, a_{kl}] = g_{jk}a_{il} - g_{ik}a_{jl} + g_{il}a_{jk} - g_{jl}a_{ik}, \quad \text{per } G_p^m \text{ e } I_p^m \quad (5.9a)$$

Il commutatore (5.9a) corrisponde alla parentesi $[M^{(ij)}, M^{(kl)}]$, quindi il risultato di tale commutatore è identico a quello del commutatore dell'algebra \mathfrak{g} . Bisogna, pertanto, determinare gli elementi $M^{(ij)}M^{(kl)}$ ed $M^{(kl)}M^{(ij)}$:

$$M^{(ij)}M^{(kl)} = \mu_{ij}\mu_{kl}\delta_{jk}g_{il} + \mu_{ji}\mu_{kl}\delta_{ki}g_{jl} + \mu_{ij}\mu_{lk}\delta_{jl}g_{ik} + \mu_{ji}\mu_{lk}\delta_{il}g_{jk}$$

$$M^{(kl)}M^{(ij)} = \mu_{kl}\mu_{ij}\delta_{li}g_{kj} + \mu_{kl}\mu_{ji}\delta_{lj}g_{ki} + \mu_{lk}\mu_{ij}\delta_{ki}g_{lj} + \mu_{lk}\mu_{ji}\delta_{kj}g_{li}$$

da cui si ottiene:

$$M^{(ij)}M^{(kl)} - M^{(kl)}M^{(ij)} = \mu_{il}g_{jk} - \mu_{jl}g_{ik} - \mu_{ik}g_{jl} + \mu_{jk}g_{il}$$

che è consistente con la (5.9a).

Restano i commutatori con b_i , validi solo in I_p^m :

$$[a_{ij}, b_k] = g_{jk}b_i - g_{jk}b_j, \quad [b_i, b_j], \quad \text{per } I_p^m \quad (5.9b)$$

Siano

$$i \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \mu_{ij} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\mu_{ij} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \delta_1^k \\ 0 & \dots & 0 & \delta_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \delta_n^k \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$i \quad j$

rispettivamente la rappresentazione matriciale di a_{ij} , b_k in I_p^m . Utilizzando tale rappresentazione, le parentesi di commutazione nella (5.9b) sono immediatamente calcolate².

¹Se g_{ik} è diagonale, a_{ij} genera le trasformazioni del piano $x_i - x_j$ in se stesso, b_i le traslazioni nella i -sima direzione.

²I procedimenti per il calcolo delle parentesi in (5.9a) e (5.9b) sono assenti in [7]. Si è preferito inserire, a titolo di esempio, dei procedimenti il più semplici possibili

Infine, utilizzando $a_i^j = g^{jk} a_{ik}$ nelle (5.9a), (5.9b), si ottiene

$$[a_i^j, a_{jl}] = (m - 2)a_{il} \quad (5.9c)$$

$$[a_i^j, b_j] = (m - 1)b_i \quad (5.9d)$$

5.2.2 Determinazione degli esponenti infinitesimi

I. Supponiamo $m > 2$. Sia Ξ un esponente infinitesimo dell'algebra di Lie sia di G_p^m , sia di I_p^m ; si pone:

$$\xi_{ij,kl} = \Xi(a_{ij}, a_{kl}) \quad (5.10a)$$

Segue, dalla (5.7) e dall'antisimmetria di Ξ :

$$\xi_{kl,ij} = -\xi_{ij,kl}; \quad \xi_{ji,kl} = \xi_{ij,kl} = -\xi_{ij,kl} \quad (5.10b)$$

Dalla (5.9c), $(m - 2)\xi_{ij,kl} = \Xi([a_i^h, a_{hj}], a_{kl})$, e quindi dalla (4.47):

$$\begin{aligned} (m - 2)\xi_{ij,kl} &= \Xi(a_i^h, [a_{hj}, a_{kl}]) + \Xi(a_{hj}, [a_{kl}, a_i^h]) = \\ &= \Xi(a_i^h, [a_{hj}, a_{kl}]) - \Xi(a_j^h, [a_{hi}, a_{kl}]) \end{aligned}$$

Sostituendo alle parentesi di commutazione i loro valori (5.9a) ed utilizzando la (5.10b) si trova:

$$(m - 2)\xi_{ij,kl} = g_{jk}\xi_{i,hl}^h - \xi_{ik,jl} + \xi_{il,jk} - g_{jl}\xi_{i,hk}^h - g_{ik}\xi_{j,hl}^h + \xi_{jk,il} - \xi_{jl,ik} + g_{il}\xi_{j,hk}^h$$

E quindi:

$$\begin{aligned} \Xi(a_{ij}, a_{kl}) &= \xi_{ij,kl} = g_{jk}\tau_{il} - g_{ik}\tau_{jl} + g_{il}\tau_{jk} - g_{jl}\tau_{ik} \\ \tau_{ik} &= -\tau_{ki} = (m - 2)^{-1}\xi_{i,hk}^h \end{aligned} \quad (5.11)$$

Si definisce sull'algebra di Lie di G_p^m una forma lineare Λ : $\Lambda(a_{ij}) = \tau_{ij} = -\tau_{ji}$. Allora, dalla (5.9a), $\Lambda([a_{ij}, a_{kl}]) = \Xi(a_{ij}, a_{kl})$. Così, per G_p^m , $\Xi = d[\Lambda] \equiv 0$. Quindi, per il Lemma 4.9:

5.2.A. Ogni esponente locale di G_p^m ($m \geq 2$) è equivalente a zero.

II. Per I_p^m ($m > 2$) restano da determinare $\Xi(a_{ij}, b_k)$, $\Xi(b_i, b_k)$. Si pone

$$\Xi(a_{ij}, b_k) = \eta_{ij,k} = -\eta_{ji,k}$$

Dalle (5.9d), (4.47) e (5.9b),

$$\begin{aligned} (m - 1)\eta_{ij,k} &= \Xi(a_{ij}, [a_k^h, b_h]) = \Xi([a_{ij}, a_k^h], b_h) + \Xi(a_k^h, [a_{ij}, b_h]) = \\ &= g_{jk}\eta_{i,h}^h - g_{ik}\eta_{j,h}^h + \eta_{jk,i} - \eta_{ik,j} + \eta_{kj,i} - \eta_{ki,j} \end{aligned}$$

e quindi

$$\Xi(a_{ij}, b_k) = g_{jk}\theta_i - g_{ik}\theta_j \quad (5.12)$$

dove $\theta_i = (m-1)^{-1}\eta_{i,h}^h$.

Infine, sempre dalle (5.9d), (4.47) e (5.9b),

$$(m-1)\Xi(b_i, b_j) = \Xi([a_i^h, b_h], b_j) = \Xi([a_i^h, b_j], b_h) = \delta_j^h \Xi(b_i, b_h) - g_{ij} \Xi(b^h, b_h)$$

Dall'antisimmetria, $\Xi(b^h, b_h) = 0$. Quindi $(m-2)\Xi(b_i, b_j) = 0$ e

$$\Xi(b_i, b_j) = 0 \quad (5.13)$$

Si definisce, sull'algebra di I_p^m , una forma lineare Λ , $\Lambda(a_{ij}) = \tau_{ij} = -\tau_{ji}$, $\Lambda(b_i) = \theta_i$. Quindi, un confronto tra (5.11), (5.12), (5.13) mostra che $\Lambda([a_{ij}, a_{kl}]) = \Xi(a_{ij}, a_{kl})$, $\Lambda([a_{ij}, b_k]) = \Xi(a_{ij}, b_k)$, $\Lambda([b_i, b_j]) = 0 = \Xi(b_i, b_j)$. Così $\Xi = d[\Lambda] \equiv 0$. Quindi:

5.2.B. Ogni esponente locale di I_p^m ($m > 2$) è equivalente a zero.

III. Sia $m = 2$ (I_p^2). In questo caso l'ultima affermazione non è più valida. Si assuma g_{ik} diagonale. Allora, dalla (5.9b)

$$[a_{12}, b_1] = -g_{11}b_2, \quad [a_{12}, b_2] = g_{22}b_1, \quad [b_1, b_2] = 0$$

La condizione (4.47) è nulla ($a = a_{12}$, $a' = b_1$, $a'' = b_2$). Così ogni forma bilineare antisimmetrica è un esponente infinitesimo. Se $\Xi = d[\Lambda]$,

$$\Xi(a_{12}, b_1) = -g_{11}\Lambda(b_2), \quad \Xi(a_{12}, b_2) = g_{22}\Lambda(b_1), \quad \Xi(b_1, b_2) = 0$$

Poiché $\Lambda(b_i)$ può essere scelto in maniera arbitraria, segue che $\Xi \equiv 0$ se e solo se $\Xi(b_1, b_2) = 0$. Quindi l'insieme \mathfrak{B}^* delle classi di equivalenza di Ξ ha dimensione 1, ed un insieme completo di esponenti locali non-equivalenti ξ di I_p^2 (o di $I_p'^2$) è costituito da tutti i multipli di uno $\xi_0 \neq 0$. Così, detti $r = (W_r, u_r)$, $s = (W_s, u_s)$, un esponente (definito su tutto il gruppo $I_p'^2$) è

$$\xi_0(r, s) = D(u_r, W_r u_s) \quad (5.14)$$

dove $D(u, v) = u_1 v_2 - v_1 u_2$ indica il determinante di due vettori u, v , in questo caso a due componenti. Dalla (4.55) si può verificare che $\xi_0 \neq 0$, operando un ragionamento per assurdo. Sia $\xi_0 \equiv 0$, allora $\xi(r, s) = \xi(s, r)$, con $rs = sr$. Se, però, $r = (1, u_r)$, $s = (1, u_s)$, con u_r, u_s linearmente dipendenti, l'antisimmetria di ξ risulta violata. Inoltre sia (4.15), sia (4.16) sono verificate per tutti gli elementi del gruppo $I_p'^2$, poiché W ha determinante 1. Si noti, infine, che la (5.14) è compatibile con l'esponente (5.1c).

5.2.3 Gruppi coprenti e rappresentazioni proiettive di $G_p^{I'm}, I_p^{I'm}$

Siano G_p^{*m}, I_p^{*m} i gruppi coprenti universali rispettivamente di $G_p^{I'm}, I_p^{I'm}$, e siano r, s, \dots gli elementi di G_p^{*m} . Ad ogni r corrisponde un unico elemento di $G_p^{I'm}$ e così una matrice $W(r)$. Gli elementi di I_p^{*m} saranno identificati dalla coppia (r, u) , ed il prodotto in I_p^{*m} definito da:

$$(s, u_s) \cdot (r, u_r) = (sr, W(s)u_r + u_s) \quad (5.15)$$

con $s, r \in G_p^{I'm}$. Si ha $G_p^{I'm} = G_p^{*m}/N_p^m, I_p^{I'm} = I_p^{*m}/\hat{N}_p^m$, dove N_p^m, \hat{N}_p^m sono rispettivamente i sottogruppi centrali discerti di G_p^{*m}, I_p^{*m} . Gli elementi di \hat{N}_p^m sono della forma $(t, 0)$, con $t \in N_p^m$, così che $N_p^m \simeq \hat{N}_p^m$. Infine N_p^m è il prodotto diretto di due gruppi ciclici:

$$N_p^m \simeq C_p \times c_{m-p} \quad (5.16)$$

C_p è di ordine 2 se $p \geq 3$, C_2 è un gruppo ciclico infinito, C_p è di ordine 1 se $p = 1$ o 0 (nel qual caso può essere omesso dal prodotto (5.16)).

Rappresentazioni proiettive

Si assume $m \geq 3$. Per il Teorema 4.4 si conclude da **5.2.A** e da **5.2.B** che ogni rappresentazione di G_p^{*m} (o di I_p^{*m}) è indotta da una rappresentazione ordinaria U . Ciò genera una rappresentazione proiettiva di $G_p^{I'm}$ (o di $I_p^{I'm}$) se per ogni elemento t di N_p^m (o di \hat{N}_p^m), $U_t = \chi(t) \cdot 1$ (che è sempre il caso se la rappresentazione è irriducibile). Poiché tutte le U_t rappresentano l'identità di $G_p^{I'm}$ (o di $I_p^{I'm}$) e $\chi(t)\chi(t') = \chi(tt')$ la possibile *many-valuedness* di questa, una rappresentazione può essere dedotta dalla (5.16).

5.3 Gruppo delle rotazioni

I gruppi puntuali³ di maggiore interesse fisico sono utilizzati in cristallografia, che utilizza gruppi che descrivono i possibili punti di simmetria presenti in strutture ripetute come i cristalli. Tra i gruppi fondamentali c'è sicuramente il gruppo delle rotazioni.

Il gruppo delle rotazioni (SO(3)) possiede, oltre all'usuale rappresentazione vettoriale ad un valore, anche rappresentazioni a doppio valore. Tali rappresentazioni possono essere ottenute come rappresentazioni ad un valore del

³Per **gruppo puntuale** si intende un gruppo di simmetria i cui elementi lasciano invariato almeno un punto dello spazio, modificandone gli altri.

gruppo coprente di $SO(3)$, ovvero il gruppo delle trasformazioni unitarie 2×2 ($U(2)$). Un modo più semplice per vedere tali rappresentazioni a doppio valore, però, è facendo uso delle rappresentazioni proiettive.

Infatti, siano r, s, \dots elementi del gruppo delle rotazioni e sia $R(r)$ un operatore appartenente alla rappresentazione a valore singolo; allora

$$R(r)R(s) = R(rs) \quad (5.17a)$$

Se, invece, $R(r)$ appartiene alla rappresentazione a valore doppio, \mathcal{R}_r , allora

$$R(r)R(s) = \pm R(rs) \quad (5.17b)$$

Il primo obiettivo è quindi mostrare che esiste una rappresentazione del tipo (5.17b) e, quindi, che essa è una rappresentazione proiettiva. Fisicamente tale rappresentazione è associata a stati di spin semi-intero, mentre la rappresentazione unitaria a valore singolo è associata a spin intero.

5.3.1 Determinazione del fattore di fase

Chiariamo, innanzitutto, la notazione: l'operatore corrispondente alla rotazione intorno all'asse e di un angolo π , normalizzato in maniera tale che il suo quadrato sia pari ad 1, sarà indicato da \tilde{e} , $\tilde{e}^2 = 1$. Gli \tilde{e} sono unicamente determinati a meno del segno. Una rotazione r intorno ad un asse v di un angolo α è il prodotto di due rotazioni di angolo π intorno agli assi e_1, e_2 , dove e_1 ed e_2 sono perpendicolari a v con e_2 che è ottenuto ruotando e_1 intorno a v di un angolo pari ad $\frac{\alpha}{2}$. Scegliendo, per ogni v , un arbitrario e_1 perpendicolare a v , si può normalizzare, e quindi:

$$R(r) = \pm \tilde{e}_1 \tilde{e}_2 \quad (5.18a)$$

Inoltre $R(r)$ commuta con ogni $R(s)$ se s è una rotazione intorno all'asse v . Quindi, trasformando la (5.18a) con $R(s)$ si ottiene:

$$R(r) = \pm R(s) \tilde{e}_1 R(s)^{-1} \cdot R(s) \tilde{e}_2 R(s)^{-1} \quad (5.18b)$$

$R(s) \tilde{e}_1 R(s)^{-1}$ corrisponde ad una rotazione di π intorno ad un certo asse e_3 , perpendicolare a v e ruotato rispetto ad e_1 di un angolo β , con β l'angolo della rotazione s . Poiché il quadrato di $R(s) \tilde{e}_1 R(s)^{-1}$ è ancora 1, la (5.18b) è semplicemente un altro modo di scrivere $R(r) = \tilde{e}_3 \tilde{e}_4$ come prodotto di due nuovi \tilde{e} ; si può vedere che la normalizzazione (5.18a) è indipendente dalla scelta dell'asse e_1 .

Siano, ora, v_r, v_t due assi di rotazione qualsiasi, e siano r, t le rotazioni di

angolo α_r , α_t intorno ai rispettivi assi. Sia, inoltre, e_c l'asse passante per l'intersezione tra i piani perpendicolari a v_r e v_t . Allora $R(r) = \tilde{e}_r \tilde{e}_c$, $R(t) = \tilde{e}_c \tilde{e}_t$. Allora il prodotto

$$R(r)R(t) = \pm \tilde{e}_r \tilde{e}_c \tilde{e}_c \tilde{e}_t = \pm \tilde{e}_r \tilde{e}_t \quad (5.18c)$$

avrà automaticamente la normalizzazione (5.18a). Ciò mostra che gli operatori normalizzati come in (5.18a) formano una rappresentazione del gruppo delle rotazioni a meno del segno.

5.3.2 Continuità della rappresentazione

Il fattore di fase nella (5.18c), a differenza di quello nella (4.10), non è, in maniera evidente, un fattore proiettivo poiché non è unicamente determinato per ogni coppia di rotazioni r , t . Per costruire una rappresentazione proiettiva è quindi necessario dare una regola a tale effetto. Nel gruppo continuo delle rotazioni questa è fornita utilizzando le condizioni di continuità. Per fare ciò bisogna, innanzitutto, caratterizzare le rotazioni di $SO(3)$.

Una rotazione r è completamente determinata dalla sua azione sulla sfera unitaria e sarà identificata dal suo asse di rotazione v e dal suo angolo di rotazione α , $-\pi < \alpha \leq \pi$. L'intervallo è aperto poiché una rotazione di $-\pi$ è identica ad una rotazione di π . Si ricorda che le rotazioni sono definite dal risultato della loro azione sulla sfera unitaria e non dal modo in cui questa viene effettuata, come visto in precedenza. Per quel che riguarda il segno di α , le rotazioni positive intorno ad un asse impongono la definizione di un verso positivo lungo l'asse stesso e sono di verso orario quando viste dall'asse positivo, ovvero di verso anti-orario se viste da sopra la semisfera positiva. Evidentemente fissato un verso positivo ad un asse, si definisce in questo modo anche una semisfera positiva, ovvero la semisfera la cui superficie interseca l'asse positivo. A questo punto tutti i semi-assi che intersecano la semisfera positiva saranno assi positivi.

Si definisce, ora, la così detta **sfera parametrica**, i cui punti identificheranno una determinata rotazione. Per sfera parametrica si intende una sfera di raggio π orientata nello stesso modo della sfera unitaria nella sua posizione non ruotata. La semisfera positiva sulla sfera parametrica è, inoltre, definita nello stesso modo della semisfera positiva sulla sfera unitaria. I punti lungo un diametro della sfera parametrica a distanza, ad esempio, $+a$ e $-a'$ dal centro indicano rotazioni intorno all'asse della sfera unitaria parallele al diametro scelto e di angoli α , α' rispettivamente uguali ad a , a' numeri positivi. Questi punti saranno detti i punti parametrici delle corrispondenti rotazioni. Ogni punto lungo un diametro della sfera parametrica identifica unicamente

una rotazione, anche se il punto della superficie della sfera sull'asse negativo del diametro non esiste: quella particolare rotazione è data dall'altro estremo del diametro.

Un altro importante concetto è quello di **percorso** in uno spazio parametrico, uno strumento che consente, in un gruppo continuo, la descrizione grafica della regola di moltiplicazione. Si consideri, ad esempio, l'asse z , l'asse di rotazione della sfera unitaria, e quindi si realizzano, in successione, due rotazioni rispettivamente di angolo α , α' tali che $\alpha + \alpha' = \alpha'' < \pi$. La prima rotazione sarà determinata da un punto lungo l'asse z , questa volta della sfera parametrica, distante $a = \alpha$ dall'origine. Quando verrà effettuata la seconda rotazione, questo punto verrà spostato lungo z di $a' = \alpha'$ per andare ad occupare il punto parametrico a'' . Allo stesso modo, se si effettua una sequenza di rotazioni infinitesime α_i ($i = 1, 2, \dots$), il punto parametrico si sposterà dal centro della sfera (il punto parametrico dell'identità) fino a coprire una distanza pari alla somma di tutti gli angoli infinitesimi. Facendo ciò, il punto parametrico è gradualmente spostato lungo una linea continua nella sfera parametrica che è detta *percorso*. Lo stesso punto parametrico può essere raggiunto dall'identità con più percorsi (in effetti da un numero infinito). Così, il punto parametrico corrispondente intorno all'asse z di un angolo $-\frac{1}{2}\pi$ (ovvero il punto medio del semiasse negativo di z) può essere raggiunto o da una serie di rotazioni infinitesime negative che portano da e in $-\frac{1}{2}\pi$, o da una serie di rotazioni infinitesime positive che da e portano prima in π e quindi in $-\frac{1}{2}\pi$, e questo perché i punti parametrici π e $-\pi$ sono topologicamente identici.

I due percorsi ora descritti differiscono per una proprietà fondamentale: mentre il primo è un percorso continuo, il secondo presenta una discontinuità o *salto* quando passa dal punto sulla superficie della sfera parametrica al suo antipodo. È chiaro che questi due percorsi, sebbene i loro punti iniziale e finale coincidono, non possono essere continuamente deformati uno nell'altro. Il concetto della deformazione continua dei percorsi è essenziale nello studio delle proprietà di continuità di $SO(3)$ e se ne può fornire un'espressione sistematica attraverso l'omotopia:

- Due percorsi con punti iniziale e finale coincidenti sono detti omotopici se possono essere continuamente deformati uno nell'altro.

Queste definizioni sono valide per qualsiasi spazio topologico; la particolare proprietà delle sfere parametriche di $SO(3)$ è che, per ogni due punti sulla sfera, il numero infinito di percorsi tra essi può essere classificato in due sole classi di omotopia: i percorsi che non contengono salti (classe 0) e quelli che ne contengono uno (classe 1).

A questo punto si può dire che il fattore $+1$ nella (5.18c) corrisponde ad un

percorso γ appartenente alla classe 1 ($\gamma : t \rightarrow rt \in$ classe 0, ovvero il percorso γ che porta le coordinate sulla sfera parametrica di t nelle coordinate sulla sfera parametrica di rt appartiene alla classe 0), mentre il fattore -1 corrisponde ad un percorso γ appartenente alla classe 2 ($\gamma : t \rightarrow rt \in$ classe 1). Si può così costruire una rappresentazione proiettiva delle rotazioni:

$$R(r)R(s) = \omega(r, s)R(rs) \quad (5.19a)$$

dove

$$\omega(r, s) = +1 \text{ per } \gamma : s \rightarrow rs \in \text{ classe 0} \quad (5.19b)$$

$$\omega(r, s) = -1 \text{ per } \gamma : s \rightarrow rs \in \text{ classe 1} \quad (5.19c)$$

Chiaramente se il percorso nella (5.19c) è debolmente deformato nell'avvicinamento al suo punto finale, si otterrà un percorso omotopico che causa lo stesso fattore proiettivo. Ciò assicura la continuità della rappresentazione in $SO(3)$.

5.3.3 La rappresentazione proiettiva di $SO(3)$ in $SU(2)$

Una rappresentazione proiettiva del gruppo delle rotazioni con un fattore di fase definito come nelle (5.19b), (5.19c) è associato, come si vedrà a breve, con un sistema fisico con momento angolare pari a $\frac{1}{2}$ (spin semi-intero). Per un tale sistema, una rotazione di angolo α intorno ad un asse $\vec{v} = (x, y, z)$ della sfera unitaria ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) può essere espresso da una matrice di $SU(2)$:

$$R(\alpha, \vec{v}) = \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - i(\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \quad (5.20a)$$

dove le componenti di $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi, utilizzando la notazione:

$$\lambda_0 = \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right), \quad \vec{\lambda} = \vec{v} \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

la rotazione (5.20a) diventa

$$R(\alpha, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \lambda_0 - i\lambda_z & -\lambda_y - i\lambda_x \\ \lambda_y - i\lambda_x & \lambda_0 + i\lambda_z \end{pmatrix} \quad (5.20b)$$

I λ devono soddisfare alla condizione:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad (5.21)$$

e quando tutti i λ sono scelti in maniera tale da soddisfare tale condizione, allora si genera l'intero $SU(2)$. Inoltre l'appartenenza dell'angolo α all'intervallo $]-\pi, \pi]$ e la definizione della semisfera positiva inducono le seguenti condizioni per le λ , una alternativa all'altra:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \lambda > 0; \\ \text{ii)} & \lambda_0 = 0, \lambda_z > 0; \\ \text{iii)} & \lambda_0 = 0, \lambda_z = 0; \lambda_x > 0; \\ \text{iv)} & \lambda_0 = 0, \lambda_z = 0, \lambda_x = 0, \lambda_y > 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Date queste restrizioni, esiste un'applicazione tra il gruppo delle rotazioni ed il suo gruppo coprente che ad ogni rotazione di $SO(3)$ associa una e solo una matrice di $SU(2)$ del tipo (5.20b); questa applicazione, però, non è un isomorfismo poiché l'insieme delle matrici che soddisfa alle condizioni (5.21), (5.22) non è chiuso.

Siano, ora, $R_i = R(\alpha_i, \vec{v}_i)$, con $i = 1, 2$, due rotazioni distinte, caratterizzate da $\lambda_{0i}, \lambda_{xi}$. Dalla (5.19a) esisterà un fattore di fase tale che

$$R(\alpha_1, \vec{v}_1) \cdot R(\alpha_2, \vec{v}_2) = \omega(R_1, R_2) R(\alpha_3, \vec{v}_3) \quad (5.23)$$

dove il fattore di fase $\omega(R_1, R_2)$ è dello stesso tipo di quello nella (5.19a).

Si può verificare, utilizzando la forma (5.20b), che la terza rotazione è caratterizzata da:

$$\begin{aligned} \lambda_{03} &= \lambda_{01} \lambda_{02} - \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_2 \\ \vec{\lambda}_3 &= \lambda_{02} \vec{\lambda}_1 + \lambda_{01} \vec{\lambda}_2 + \vec{\lambda}_1 \times \vec{\lambda}_2 \end{aligned}$$

con il fattore di fase della (5.23) (e quindi quello della (5.19a)) che rispetta alle (4.11), (4.12).

5.4 Gruppo di Galileo

Il gruppo di Galileo è il gruppo costituito da tutte le trasformazioni dello spaziotempo che consentono di passare da un sistema di riferimento inerziale (fisso) ad un altro (in moto relativo rispetto al primo). La più generale trasformazione del gruppo di Galileo G può essere scritta come:

$$\begin{cases} x' = Wx + vt + u \\ t' = t + \eta \end{cases} \quad (5.24a)$$

dove x' , x sono i vettori di posizione, v è il vettore della velocità relativa, u una generica traslazione spaziale, t' , t il tempo ed η una traslazione temporale, W una trasformazione ortogonale (rotazione).

Il gruppo di Galileo può essere studiato attraverso la teoria delle rappresentazioni proiettive (*projective representations* o anche *ray representations*): lo schema sviluppato da V. Bargmann [7], ancora oggi valido, consente di ottenere risultati molto interessanti.

Sia r il generico elemento del gruppo di Galileo G . Esso verrà indicato come:

$$r = (W_r, \eta_r, v_r, u_r) \quad (5.24b)$$

A questo punto il prodotto tra due elementi r , s di G sarà dato da:

$$\begin{aligned} rs &= (W_r, \eta_r, v_r, u_r) \cdot (W_s, \eta_s, v_s, u_s) = \\ &= (W_r W_s, \eta_r + \eta_s, W_r v_s + v_r, W_r u_s + u_r + \eta_s v_r) \end{aligned} \quad (5.25)$$

dove s agisce prima di r .

Del gruppo di Galileo si può anche fornire una rappresentazione matriciale, con matrici di dimensione 5×5 :

$$Z(r) = \begin{pmatrix} W_r & v_r & u_r \\ 0 & 1 & \eta_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

dove W_r è una matrice 3×3 , v_r , u_r vettori colonna a 3 componenti ed η_r un reale. Tale definizione è compatibile con il prodotto (5.25).

Infine, mentre l'identità è data da $e = (1, 0, 0, 0)$, l'elemento inverso è dato da:

$$r^{-1} = (W_r^{-1}, -\eta_r, -W_r^{-1}v_r, -W_r^{-1}(u_r - \eta_r v_r)) \quad (5.27)$$

5.4.1 L'algebra di Lie

Sia K la trasformazione infinitesima del gruppo G . La sua forma è data da:

$$K = \begin{pmatrix} M & k' & k \\ 0 & 0 & \phi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

dove M è una matrice 3×3 antisimmetrica nulla lungo la diagonale, k e k' sono vettori tridimensionali arbitrari e ϕ un numero reale.

I vettori della base standard dell'algebra di Lie sono dati da a_{ij} ($i < j$), b_i , d_i , f , con a_{ij} definito da (vedi anche la (5.7)):

$$a_{ij} + a_{ji} = 0 \quad (5.29)$$

Questa base è rappresentata da (vedi anche la (5.8)):

$$\begin{aligned} a_{ij} &\rightarrow (M^{(ij)}, 0, 0, 0), & b_i &\rightarrow (0, 0, 0, k^{(i)}) \\ d_i &\rightarrow (0, 0, k_i, 0), & f &\rightarrow (0, 1, 0, 0) \end{aligned} \quad (5.30)$$

dove $M^{(ij)}$ sono matrici costituite dai soli elementi di posto ij e ji della matrice M in (5.28) e con le stesse proprietà di a_{ij} , $k^{(i)}$ è il vettore di componenti $\kappa^j = \delta_i^j$. Inoltre b_i genera le traslazioni, d_i le trasformazioni di Galileo pure, f le traslazioni temporali. L'algebra di Lie del gruppo G risulta una diretta conseguenza dell'algebra dei gruppi pseudo-ortogonali⁴:

$$[a_{ij}, a_{kl}] = \delta_{jk}a_{il} - \delta_{ik}a_{jl} + \delta_{il}a_{jk} - \delta_{jl}a_{ik} \quad (5.31a)$$

$$[a_{ij}, b_k] = \delta_{jk}b_i - \delta_{ik}b_j; \quad [b_i, b_j] = 0 \quad (5.31b)$$

$$[a_{ij}, d_k] = \delta_{jk}d_i - \delta_{ik}d_j; \quad [d_i, d_j] = 0; \quad [d_i, b_j] = 0 \quad (5.31c)$$

$$[a_{ij}, f] = 0; \quad [b_k, f] = 0; \quad [d_k, f] = b_k \quad (5.31d)$$

5.4.2 Gli esponenti della rappresentazione proiettiva

Per determinare gli esponenti di fase di ogni rappresentazione proiettiva del gruppo di Galileo G , bisogna innanzitutto determinare gli esponenti infinitesimi, ovvero le forme bilineari antisimmetriche definite sull'algebra \mathfrak{g} del gruppo. Per il Lemma 4.11, esiste una corrispondenza biunivoca tra gli esponenti infinitesimi e gli esponenti di fase della rappresentazione proiettiva; per quel che riguarda il gruppo di Galileo in 3 dimensioni si trova che l'unico esponente infinitesimo non nullo è il seguente:

$$\Xi(b_i, d_k) = -\Xi(d_k, b_i) = \gamma \delta_{ik} \quad (5.32a)$$

con γ numero reale.

Determinazione degli esponenti infinitesimi

Sia Ξ un esponente infinitesimo di \mathfrak{g} . Si noti che gli elementi $(W, 0, v, 0)$, $(W, 0, 0, u)$ di G formano sottogruppi isomorfi ad I_3^3 e che i vettori a_{ij} , b_k , ed

⁴Semplicemente si deve sostituire a g_{ij} , δ_{ij} nelle (5.9a), (5.9b), utilizzando i generatori infinitesimi del gruppo di Galileo

i vettori a_{ij} , d_k generano due sottoalgebre di \mathfrak{g} isomorfe all'algebra di Lie di I_3^3 . Di conseguenza i risultati ottenuti per i gruppi pseudo-ortogonali (Sezione 5.2) possono essere applicati anche in questo caso:

$$\begin{aligned}\Xi(a_{ij}, d_k) &= \delta_{jk}\theta'_i - \delta_{ik}\theta'_j \\ \Xi(d_i, d_j) &= 0\end{aligned}\tag{5.32b}$$

dove $\theta'_i = \frac{1}{2}\Xi(a_i^j, d_j)$.

Si pone, ora, $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$, dove Λ è una forma lineare definita da:

$$\Lambda(a_{ij}) = \tau_{ij} = -\tau_j i, \quad \Lambda(b_i) = \theta_i, \quad \Lambda(d_i) = \theta'_i, \quad \Lambda(f) = 0$$

Dalle (5.11), (5.12), (5.13), (5.32b) si trova:

$$\begin{aligned}\Xi'(a_{ij}, a_{kl}) &= 0, & \Xi'(a_{ij}, b_k) &= \Xi'(a_{ij}, d_k) = 0 \\ \Xi'(b_i, b_j) &= \Xi'(d_i, d_j) = 0\end{aligned}\tag{5.32c}$$

Dalle (5.9b), (4.47), (5.31c) si ricava:

$$\begin{aligned}2\Xi'(b_i, d_k) &= \Xi'([a_i^j, b_j], d_k) = \Xi'([a_i^j, d_k], b_j) + \Xi'([d_k, b_j], a_i^j) = \\ &= -\Xi'(b_k, d_i) + \delta_{ik}\Xi'(b^j, d_j)\end{aligned}$$

Combinando quest'ultima con $2\Xi'(b_k, d_i) = -\Xi'(b_i, d_k) + \delta_{ik}\Xi'(b^j, d_j)$ si ottiene:

$$\Xi'(b_i, d_k) = \gamma\delta_{ik}$$

dove $\gamma = \frac{1}{3}\Xi'(b^j, d_j)$.

I restanti Ξ' sono ricavati da

$$d\Xi'(a_i^h, a_{hj}, f) = 0, \quad d\Xi'(a_i^j, b_j, f) = 0, \quad d\Xi'(a_i^j, d_j, f) = 0$$

Sostituendo alle parentesi di commutazione (vedi (4.47)) le loro rispettive espressioni ed utilizzando la (5.32c), si ottiene:

$$\Xi'(a_{ij}, f) = 0, \quad \Xi'(b_i, f) = 0, \quad \Xi'(d_i, f) = 0\tag{5.32d}$$

Quindi tutti gli Ξ' si annullano per tutte le possibili coppie dei vettori di base con la possibile eccezione di

$$\Xi'(b_i, d_k) = -\Xi'(d_k, b_i) = \gamma\delta_{ik}$$

ovvero la (5.32a).

D'altra parte, per ogni γ la forma bilineare antisimmetrica definita in questa sottosezione è un esponente infinitesimo, poiché $d\Xi'$ si annulla per tutte le combinazioni dei vettori di base. In più, $\Xi' \neq 0$ se $\gamma \neq 0$, poiché $\Xi = d[\Lambda]$ implica, in particolare, $\Xi(b_i, d_k) = \Lambda([b_i, d_k]) = 0$. Così l'insieme delle classi di equivalenza degli esponenti infinitesimi è mono-dimensionale.

Gli esponenti definiti su tutto il gruppo

A questo punto, un insieme completo di esponenti ξ di G è costituito da tutti i multipli di un fissato $\xi_0 \neq 0$. Una scelta opportuna è⁵:

$$\xi_0(r, s) = \frac{1}{2} (\langle u_r | W_r v_s \rangle - \langle v_r | W_r u_s \rangle + \eta_s \langle v_r | W_r v_s \rangle) \quad (5.33)$$

dove $\langle \cdot | \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare canonico dello spazio euclideo.

È semplice verificare che, $\forall r, s, t \in G$, la (5.33) soddisfa alle condizioni (4.15), (4.16), che definiscono un esponente di fase, in questo caso globale, di una rappresentazione proiettiva.

Quindi, per $r, s \in G$, esistono due operatori unitari $U(r)$, $U(s)$ tali che:

$$U(r)U(s) = e^{i\gamma\xi_0(r,s)} U(rs) \quad (5.34)$$

dove il primo operatore ad agire è $U(r)$, ovvero:

$$(U(r)U(s))f(p) = e^{ig(r,p)} U(s)f(r^{-1}p)$$

dove $g(r, p)$ è una funzione dei parametri di r e del vettore $p \in \mathcal{H}$, spazio di Hilbert su cui sono definiti gli operatori $U(r)$, $U(s)$.

5.4.3 Il gruppo di Galileo in meccanica quantistica

Un ulteriore passaggio interessante è la determinazione di una rappresentazione proiettiva del gruppo di Galileo. In particolare, sia $\psi(x, t)$ una soluzione

⁵Un metodo per verificare che questo esponente di fase è un buon esponente di fase, può essere il seguente:

Dalla (5.32a) si determina che gli unici generatori che contribuiscono alla costruzione dell'esponente infinitesimo sono b_i e d_i , ovvero i generatori delle traslazioni spaziali e delle trasformazioni di Galileo pure. Quindi l'unico esponente di fase sul gruppo sarà quello corrispondente all'esponente infinitesimo (5.32a). In particolare, poiché $[d_i, b_j] = 0$, l'esponente $\xi(r, s)$ sarà, come nel caso dei gruppi abeliani, analitico e lo si potrà scrivere come $\xi(r, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^{(m)}(r, s)$, dove $\xi^{(m)}(r, s)$ è un polinomio omogeneo di ordine m nelle coordinate di r, s . Presi $r = (W_r, 0, v_r, u_r)$, s, t tutti, per semplicità di calcolo, senza traslazione temporale, e dette le coordinate di ciascuno, rispettivamente ρ_i, σ_i, τ_i ed utilizzando la legge di composizione (5.25) (oltre alla (4.16)) si ottiene:

$$\rho_i \sigma_j = \rho_j a_{jk} \sigma_k$$

da cui

$$\xi_0(r, s) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \beta_{ij} \rho_i \cdot W_{jk}^{(r)} \sigma_k$$

con β_{ij} antisimmetrico per lo scambio di i con j .
(vedi nota 9 di [7])

dell'equazione non relativistica di Schrödinger per una particella libera di massa m :

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2\mu}\nabla^2\psi = 0$$

dove $\mu = \frac{m}{\hbar}$, ∇^2 è il laplaciano nelle tre variabili x^k . Si indica l'insieme delle quattro variabili x^k, t con X ed $X' = rX$, dove r è la trasformazione (5.24a). Per le variabili trasformate X' la soluzione corrispondente dell'equazione di Schrödinger in queste variabili è data da $\psi'(X') = e^{-i\theta(r,X')} \psi(r^{-1}X)$, dove $\theta(r, X)$ è una funzione degli elementi r del gruppo e delle variabili X :

$$\theta(r, X) = \mu \left(\frac{1}{2}t \langle v | v \rangle - \langle v | x \rangle \right) \quad (5.35)$$

Sia T_r un operatore lineare, associato all'elemento r del gruppo di Galileo, che agisce nello spazio delle funzioni d'onda psi ; allora l'azione di r sulle ψ può essere scritta come:

$$\psi' = T_r\psi; \quad \psi'(X) = e^{-i\theta(r,X)} \psi(r^{-1}X) \quad (5.36)$$

Si confronta, ora, $\psi_1 = T_r T_s \psi$ con $\psi_2 = T_{rs} \psi$. Si pone $\psi_3 = T_s \psi$; allora

$$\psi_1(X) = e^{-i\theta(r,X)} \psi_3(r^{-1}X) = e^{-i(\theta(r,X)+\theta(s,r^{-1}X))} \psi((rs)^{-1}X)$$

mentre per ψ_2 :

$$\psi_2(X) = e^{-i\theta(rs,X)} \psi((rs)^{-1}X)$$

e quindi:

$$\psi_1(X) = e^{-i(\theta(r,X)+\theta(s,r^{-1}X)-\theta(rs,X))} \psi_2(X) \quad (5.37a)$$

Di conseguenza la relazione tra gli operatori diventa:

$$T_r T_s = e^{-i\mu\xi_1(r,s)} T_{rs}$$

dove l'esponente di fase risulta essere:

$$\xi_1(r, s) = \langle u_r | W_r v_s \rangle - \frac{\eta_r}{2} \langle v_s | v_s \rangle - \eta_r \langle v_r | W_r v_s \rangle \quad (5.37b)$$

Posto $2\zeta(r) = \eta_r \langle v_r | v_r \rangle - \langle v_r | u_r \rangle$, si scopre che $\xi_1 = \xi_0 + \Delta[\zeta]$, dove ξ_0 è l'esponente nella (5.33), e quindi $\xi_1 \equiv \xi_0$ su tutto il gruppo.

Le funzioni d'onda nello spazio dei momenti

L'insieme delle funzioni d'onda ψ soluzioni dell'equazione di Schrödinger che sono ammissibili in meccanica quantistica è dato da:

$$\psi(x, t) \sim (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \phi(k) e^{-i(\frac{t}{2\mu}\langle k|k\rangle - \langle k|x\rangle)} d^3 k \quad (5.38)$$

dove k è un vettore di tre componenti reali e finite, con $p = \hbar k$ momento lineare, dove $\phi(k)$ è una funzione integrabile al quadrato e, per un fissato t , la $\psi(x, t)$ nella (5.38) è la trasformata di Fourier di $\psi(k) e^{-it\frac{\langle k|k\rangle}{2\mu}}$. Le funzioni $\phi(k)$, funzioni d'onda nella *rappresentazione di Heisenberg*, formano uno spazio di Hilbert \mathcal{H} con prodotto interno:

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \int \overline{\phi_1(k)} \phi_2(k) d^3 k$$

La corrispondenza $\psi \leftrightarrow \phi$ è ovviamente uno a uno. Di conseguenza a $T_r \psi$ è associato $U_r \phi$, dove U_r è un operatore che agisce nello spazio di Hilbert \mathcal{H} da determinare. Segue che

$$T_r(T_s \psi) \rightarrow U_r U_s \phi, \quad T_{rs} \psi \rightarrow U_{rs} \phi$$

e quindi

$$U_r U_s = e^{i\mu \xi_1(r,s)} U(rs) \quad (5.39a)$$

Per ottenere U_r , sia r un elemento del gruppo galileiano, allora si pone $rk = W_r k + \mu v_r$. Quindi $r(sk) = (rs)k$ e $r^{-1}k = W_r^{-1}(k - \mu v_r)$. Si ottiene così alla fine, sostituendo nelle relazioni precedenti $\psi' = T_r \psi$, $\phi' = U_r \phi$:

$$\psi'(x, t) \sim (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \phi'(k) e^{-i(\frac{t}{2\mu}\langle k|k\rangle - \langle k|x\rangle)} d^3 k$$

mentre la rappresentazione proiettiva sarà data da:

$$\phi'(k) = U_r \phi(r^{-1}k) = e^{-i(\langle k|u\rangle - \frac{\eta}{2\mu}\langle k|k\rangle + \frac{\eta}{2}\mu\langle v|v\rangle - \mu\langle u|v\rangle)} \phi(r^{-1}k) \quad (5.39b)$$

5.4.4 Determinazione dei generatori del gruppo

A questo punto è possibile determinare i generatori del gruppo e le loro relazioni di commutazione a partire dalle (5.31). Ad ogni generatore dell'algebra \mathfrak{g} si associa un generatore del gruppo [45]:

$$\begin{aligned} a_{ij} &\rightarrow M_k = i\epsilon^{ijk} a_{ij} & d_j &\rightarrow D_j = id_j \\ b_j &\rightarrow B_j = ib_j & f &\rightarrow H = if \end{aligned}$$

Fatta questa sostituzione, dalle (5.31) si ottengono le seguenti parentesi di commutazione:

$$\begin{aligned} [M_i, M_j] &= i\epsilon^{ijk} M_k, & [M_i, B_j] &= i\epsilon^{ijk} B_k, & [B_i, B_j] &= 0, \\ [M_i, D_j] &= i\epsilon^{ijk} D_k, & [M_i, H] &= 0, & [B_k, H] &= 0, & [D_k, H] &= iB_k \end{aligned} \quad (5.40)$$

Nella (5.40) manca il commutatore $[D_i, B_j]$: vediamo come lo si può ricavare a partire dal corrispondente commutatore dell'algebra.

Si sa che $[d_i, b_j] = 0$, ma anche che $\Xi(d_i, b_j) = \gamma\delta_{ij}$, ovvero preso il sottogruppo abeliano generato da d_i, b_j , per questo è possibile trovare una rappresentazione proiettiva. L'esponente infinitesimo di questa rappresentazione è legato all'esponente locale canonico dalla relazione:

$$\Xi(b_i, d_j) = 2\xi(b_i, d_j)$$

dove, dalla (5.1c):

$$\xi(b_i, d_j) = \frac{1}{2} \sum_{kl} \beta_{kl} \rho_k^{(i)} \sigma_l^{(j)} = \frac{1}{2} \gamma \delta_{ij} \quad (5.41a)$$

dove $\rho_k^{(i)} = \delta_{ki}$, $\sigma_l^{(j)} = \delta_{lj}$ sono le coordinate rispettivamente di b_i, d_j . A questo punto, detto α il parametro associato al generatore B_i , β il parametro associato al generatore D_j , le rispettive coordinate saranno $(B_i)_k = \alpha\delta_{ik}$, $(D_j)_l = \beta\delta_{jl}$. Sostituendo queste ultime nella (5.41a), si ottiene l'esponente di fase di B_i e D_j :

$$\xi(B_i, D_j) = \frac{1}{2} \sum_{kl} \beta_{kl} \alpha \delta_{ik} \beta \delta_{jl} = \frac{\gamma}{2} \alpha \beta \delta_{ij} \quad (5.41b)$$

Esiste quindi una rappresentazione proiettiva del sottogruppo generato dagli operatori unitari $e^{i\alpha B_i}$, $e^{i\beta D_j}$, generati rispettivamente da B_i, D_j ; quindi:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha B_i} e^{i\beta D_j} &= e^{i\frac{\gamma}{2}\delta_{ij}} e^{i(\alpha B_i + \beta D_j)} \\ e^{i\beta D_j} e^{i\alpha B_i} &= e^{-i\frac{\gamma}{2}\delta_{ij}} e^{i(\alpha B_i + \beta D_j)} \end{aligned}$$

da cui

$$e^{i\beta D_j} e^{i\alpha B_i} = e^{-i\gamma\alpha\beta\delta_{ij}} e^{i\alpha B_i} e^{i\beta D_j}$$

che è una regola di commutazione tipo Weyl (vedi la (4.4)), e quindi induce la seguente parentesi di commutazione tra D_j, B_i :

$$[D_j, B_i] = -i\gamma\delta_{ij} \quad (5.42)$$

Si noti che B_i è il generatore delle traslazioni spaziali, quindi $B_i \equiv P_i$, con P_i operatore del momento. Per poter quindi interpretare H , il generatore delle traslazioni temporali, come l'hamiltoniano anche in questo caso (vedi Sezione 4.1.2), bisogna identificare l'operatore di posizione Q_i .

Si osserva che l'operatore $\tilde{D}_i = \gamma Q_i$ verifica la (5.42); utilizzando \tilde{D}_i nella (5.42) e confrontando con l'espressione generale si ottiene:

$$D_i - \gamma Q_i = u(P_i)$$

Come per la Sezione 4.1.2, anche in questo caso esiste un operatore S tale che $SD_iS^{-1} = \hat{D}_i$, $SP_iS^{-1} = P_i$, con \hat{D}_i tale che $\hat{D}_i - \gamma Q_i = 0$. Seguono, quindi, le seguenti regole di commutazione:

$$[H, P_i] = 0, \quad [Q_i, H] = i \frac{P_i}{\gamma}$$

dove γ è la massa della particella esaminata.

Si può, così, concludere come nella Sezione 4.1.2: detto $H_0 = \frac{\sum P_i^2}{2\gamma}$ l'operatore di energia cinetica, il più generale generatore delle traslazioni temporali sarà della forma:

$$H = H_0 + V(Q)$$

dove $V(Q)$, funzione dell'operatore di posizione, è detto potenziale, ed H coincide con l'hamiltoniana del sistema che descrive la particella.

5.4.5 Il gruppo di Galileo in 2 dimensioni

Nel caso dei gruppi delle trasformazioni pseudo-ortogonali non-omogenee, esiste una rappresentazione proiettiva non banale solo nel caso di dimensione totale dello spazio pari a 2. Poiché l'algebra del gruppo di Galileo discende direttamente dall'algebra dei gruppi pseudo-ortogonali, ha senso aspettarsi dei fattori di fase aggiuntivi, e quindi una nuova rappresentazione proiettiva nel caso del gruppo galileiano in 2 dimensioni. Questi nuovi fattori di fase saranno, evidentemente, connessi ad esponenti infinitesimi del tipo $\Xi(b_i, b_j)$, con $[b_i, b_j] = 0$, come nel caso dell'esponente (5.14).

Nel corso di questa sottosezione, quindi, si andranno prima a calcolare i nuovi esponenti di fase e quindi le corrispondenti rappresentazioni proiettive.

Gli esponenti di fase

Seguendo quanto già fatto per il gruppo delle trasformazioni pseudo-ortogonali non-omogenee in 2 dimensioni, è immediato determinare che $\Xi(d_i, d_j) \neq 0$, e

quindi l'esistenza di un secondo esponente di fase della forma:

$$\xi_1(r, s) = \frac{1}{2}(v_r \wedge W_r v_s) \quad (5.43)$$

dove $\cdot \wedge \cdot = D(\cdot, \cdot)$.

Esiste, infine, un terzo moltiplicatore e quindi fattore di fase, che risulta essere:

$$\xi_2(r, s) = \theta_r \eta_s - \theta_s \eta_r \quad (5.44)$$

dove $\theta_{r,s}$ è l'angolo caratteristico della rotazione $W_{r,s}$.

Posto, infatti, $\Xi(a_{ij}, f) = S$, con S numero reale, essendo $\Xi(a, b)$ una forma bilineare antisimmetrica, con $a, b \in \mathfrak{g}$, detti θ ed η i parametri delle trasformazioni generate rispettivamente da a_{ij} ed f , è semplice verificare che questo terzo fattore di fase deve essere della forma (5.44)⁶.

Maggiori dettagli in [42] o in alternativa anche in [38].

Rappresentazioni proiettive e generatori infinitesimi

Per la determinazione delle rappresentazioni proiettive del gruppo di Galileo in 2 dimensioni (ma il procedimento vale per qualsiasi dimensione e tipo di gruppo) si può utilizzare un procedimento *standard*, sviluppato su [25], e poi ripreso da Grigore e Bose nei loro rispettivi lavori (vedi pag.106 e seguenti), di cui quello qui proposto ne costituisce un'unione.

Sia $r \in G$ definito come in (5.24b) e sia il prodotto tra due elementi r, s di G definito da (5.25). Allora il gruppo di Galileo può essere visto come il prodotto semidiretto dei gruppi:

$$A = \{(1, \eta, 0, u)\} \quad (5.45a)$$

$$H = \{(W, 0, v, 0)\} \quad (5.45b)$$

dove A è normale in G ed H è il prodotto semidiretto del gruppo delle rotazioni e del sottogruppo abeliano dei *boost* $\{(1, 0, v, 0)\}$, poiché ogni elemento di H ammette un'unica decomposizione $(W, 0, v, 0) = (1, 0, v, 0) \cdot (W, 0, 0, 0)$. Ogni elemento $r \in G$ ammette un'unica decomposizione $r = ah$, con $a \in A$, $h \in H$, data da:

$$(W, \eta, v, u) = (1, \eta, 0, u) \cdot (W, 0, v, 0) \quad (5.46a)$$

⁶In effetti D.R.Grigore propone (vedi [42]), per l'ultimo fattore di fase, una funzione del tipo:

$$\xi_2(r, s) = \eta_r \theta_s$$

Come, però, fa notare S.K.Bose in [38], la (5.44) verifica perfettamente la (4.16)

e l'azione di H su A è data da

$$(W, 0, v, 0) \cdot (1, \eta, 0, u) \cdot (W, 0, v, 0)^{-1} = (1, \eta, 0, Wu + \eta v) \quad (5.46b)$$

Ricordando che l'identificazione dei tre fattori di fase è già stata fatta (vedi (5.33), (5.43), (5.44)), si fissano come *parametri* per ciascuna classe di equivalenza μ , λ , S rispettivamente.

Sia quindi $G^{\mu\lambda S}$ l'estensione di G più generale:

$$G^{\mu\lambda S} = \{(r, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\} \equiv \{(W, \eta, v, u; \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\} \quad (5.47)$$

dove $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in T \times T \times T$. La regola moltiplicativa è poi:

$$\begin{aligned} (r, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \cdot (r', \zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_3) = \\ = (rr', \omega_0(r, r') \zeta_1 \zeta'_1, \omega_1(r, r') \zeta_2 \zeta'_2, \omega_2(r, r') \zeta_3 \zeta'_3) \end{aligned} \quad (5.48)$$

dove $\omega_j(r, r') = e^{i\xi_j(r, r')}$, con $0 \leq j \leq 2$.

La struttura del gruppo $G^{\mu\lambda S}$ sarà, quindi, del tipo $H^\lambda \times_t A^{\mu S}$, dove

$$A^{\mu S} = \{(1, \eta, 0, u; \zeta_0, 1, \zeta_2)\} \quad (5.49a)$$

$$H^\lambda = \{(W, 0, v, 0; 1, \zeta_1, 1)\} \quad (5.49b)$$

La decomposizione di un elemento di $G^{\mu\lambda S}$ sarà quindi del tipo:

$$(W, \eta, v, u; \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2) = (1, \eta, 0, u; \zeta'_0, 1, \zeta'_2) \cdot (h, 0, v, 0; 1, \zeta_1, 1) \quad (5.50a)$$

dove

$$\zeta'_0 = \zeta_0 e^{-i\frac{\mu}{2}\langle u|v \rangle}, \quad \zeta'_2 = \zeta_2 e^{iS\theta\eta} \quad (5.50b)$$

dove θ è il parametro identificativo della rotazione W ; infine l'azione di H^μ su $A^{\lambda S}$ è data da:

$$\begin{aligned} (W, 0, v, 0; 1, \zeta_1, 1) \cdot (1, \eta, 0, u; \zeta_0, 1, \zeta_2) \cdot (W, 0, v, 0; 1, \zeta_1, 1)^{-1} = \\ = (1, \eta, 0, Wu + \eta v; \zeta''_0, 1, \zeta'_2) \end{aligned} \quad (5.51a)$$

dove

$$\zeta''_0 = \zeta_0 e^{-i\frac{\mu}{2}(2\langle v|Wu \rangle + \eta\langle v|v \rangle)} \quad (5.51b)$$

La (5.51a) può anche essere riscritta in modo sintetico come:

$$(W, v, \zeta_1) : (\eta, u, \zeta_0, \zeta_2) \rightarrow (\eta, Wu + \eta v, \zeta''_0, \zeta'_2) \quad (5.51c)$$

Si nota che si possono presentare vari casi per scelte differenti nei valori dei parametri μ , λ , S . In particolare si proporranno qui tre casi particolare: $\mu = \lambda = S = 0$, ovvero la rappresentazione unitaria di G , gruppo di Galileo; $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $S = 0$, ovvero la rappresentazione di un sistema localizzabile per cui gli operatori di *boost* non commutano; $\mu \neq 0$, $\lambda = S = 0$, che è equivalente al caso di Galileo in 3 dimensioni. Per ognuno di questi tre casi, per ottenere la corrispondente rappresentazione proiettiva, si determina innanzitutto l'orbita Ω ed il punto ω_0 , quindi il cociclo e la rappresentazione proiettiva unitaria corrispondente secondo la seguente regola:

$$U(g) = \chi(a)V(h), \quad g = ah \quad (5.52a)$$

dove $\chi(a)$ è il carattere di a , che per $a \in A^{\mu S}$ risulta essere:

$$\chi(\eta, u; \zeta_0, \zeta_2) = \zeta_0^{n_0} \zeta_2^{n_2} e^{i(\eta p_0 + \langle u | p \rangle)} \quad (5.52b)$$

dove il carattere nella (5.52b) può essere ricavato dalla (4.78), ponendo $p_0 = \frac{\tau}{2} \langle v | v \rangle$ e $|p\rangle = \mu |v\rangle$, con $V(h)$ rappresentazione di $h \in H^\lambda$.

In questa sede, comunque, si indicherà esplicitamente il procedimento solo per il primo caso ($\mu = \lambda = S = 0$). Poiché il procedimento per gli altri casi è in tutto simile, si rimanda alla bibliografia per un esame più dettagliato [37, 42].

Si pone $\mu = \lambda = S = 0$. Si possono distinguere due diverse situazioni:

1. L'orbita è costituita dal solo punto $\omega_0 = (p_0, |0\rangle)$. La corrispondente rappresentazione è:

$$U(W, \eta, v, u) = e^{ip_0\eta} \pi(W, 0, v, 0) \quad (5.53)$$

dove π è un'arbitraria rappresentazione di H^0 .

2. L'orbita è costituita dall'insieme

$$\Omega_r = \{(p_0, |p\rangle)\}, \quad \text{con } \langle p | p \rangle = r, \quad \text{con } r > 0$$

L'insieme Ω_r contiene il punto $\omega_0 = (0, |p_*\rangle)$, dove $|p_*\rangle = (r, 0)$, in termini delle sue coordinate cartesiane. Ogni punto di Ω_r può essere determinato a partire da ω_0 sotto l'azione di un opportuno elemento di H . Infatti $(p_0, |p\rangle) = (W_*, |v\rangle)\omega_0$, dove $|v\rangle = -\frac{p_0}{r} |\hat{p}\rangle$, con $|\hat{p}\rangle = \frac{|p\rangle}{\| |p\rangle \|}$, e W_* è tale che $W_* |p_*\rangle = |p\rangle$. Così l'azione di H su Ω_r è transitiva ed Ω_r è un'orbita.

Siano $\omega = (p_0, |p\rangle)$, $\omega_0 = (0, |p_*\rangle)$, $|p_*\rangle = (r, 0)$, $g = (W, |v\rangle) \in H$.

Quindi la sezione di Borel da utilizzare per ricavare il cociclo (vedi la (4.77)) sarà

$$c(\omega) = \left(W_*, -\frac{p_0}{r} | \hat{p} \rangle \right)$$

dove W_* tale che $W_* | p_* \rangle = | p \rangle$. A questo punto, per la (4.76d), siamo interessati a calcolare $c(g\omega)^{-1}gc(\omega)$.

Poiché il punto $g\omega = (p_0 - \langle v | Wp \rangle, Wp)$ su Ω_r , allora

$$c(g\omega) = \left(WW_*, -\frac{p_0 - \langle v | Wp \rangle}{r^2} Wp \right)$$

e quindi

$$c(g\omega)^{-1}gc(\omega) = (1, | \tilde{v} \rangle)$$

dove

$$| \tilde{v} \rangle = (WW_*)^{-1} | v \rangle - \frac{\langle (WW_*)^{-1}v | p_* \rangle}{r^2} | p_* \rangle$$

$| \tilde{v} \rangle$ è perpendicolare a $| p_* \rangle$, così $c(g\omega)^{-1}gc(\omega)$ appartiene al gruppo di stabilità di ω_0 , che è abeliano e quindi tutte le sue rappresentazioni irriducibili sono mono-dimensionali. Utilizzando la (4.76d), si arriva così all'espressione del cociclo:

$$\phi(q, \omega) = e^{ia \langle \tilde{v} | \hat{j} \rangle}$$

dove a è un numero reale, $| \hat{j} \rangle$ è un vettore unitario perpendicolare a $| p_* \rangle$, e quindi parallelo od antiparallelo a $| \tilde{v} \rangle$.

Da quest'ultima, per la (4.77), si ricava

$$\phi(g, g^{-1}\omega) = e^{i\frac{a}{r}(p \wedge v)}$$

e quindi la forma finale della rappresentazione irriducibile:

$$\begin{aligned} (U(W, \eta, v, u)f)(p_0, p) &= \\ &= e^{i(\eta p_0 + \langle u | p \rangle)} e^{ia\frac{p \wedge v}{r}} f(p_0 + \langle v | p \rangle, W^{-1}p) \quad (5.54) \end{aligned}$$

dove f è una funzione integrabile al quadrato su Ω_r .

Per gli altri due casi⁷, alla procedura bisogna anche aggiungere la scelta opportuna per i valori di ζ_j , n_j , con $0 \leq j \leq 2$.

Si pone $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $S = 0$. Scelti $n_0 = n_1 = n_2 = -1$, $\zeta_0 = \zeta_1 = \zeta_2 = 1$ si ottiene, la seguente rappresentazione proiettiva unitaria:

$$\begin{aligned} (U(W, \eta, v, u)f)(p) &= \\ &= e^{i(\langle u|p\rangle + \frac{\mu}{2}\langle u|v\rangle + \frac{\eta}{2\mu}\langle p|p\rangle - \frac{\lambda}{2\mu}(v \wedge p) + s\theta)} f(W^{-1}(p + \mu v)) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Quest'ultima corrisponde al sistema localizzabile tipo-Schrödinger per cui la rappresentazione degli operatori di *boost* è non-commutativa.

Infine la rappresentazione che si riferisce ad una particella di Schrödinger non-relativistica è data da:

$$\begin{aligned} (U(W, \eta, v, u)f)(p) &= \\ &= e^{i(\langle u|p\rangle + \frac{\mu}{2}\langle u|v\rangle + \frac{\eta}{2\mu}\langle p|p\rangle)} s(h) f(W^{-1}(p + \mu v)) \end{aligned} \quad (5.56)$$

dove $\mu \neq 0$, $\lambda = S = 0$ (per la scelta $n_0 = n_1 = n_2 = -1$; $\zeta_0 = \zeta_1 = \zeta_2 = 1$), $s(h)$ una rappresentazione (irriducibile) di H^0 .

I generatori infinitesimi

I generatori infinitesimi della (5.55) risultano essere:

$$H = \frac{1}{2\mu} (p_1^2 + p_2^2) \quad (5.57a)$$

$$P_i = p_i \quad (5.57b)$$

$$M = is + p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} \quad (5.57c)$$

$$N_1 = \mu \frac{\partial}{\partial p_1} + i \frac{\lambda}{2\mu} p_2 \quad (5.57d)$$

$$N_2 = \mu \frac{\partial}{\partial p_2} - i \frac{\lambda}{2\mu} p_1 \quad (5.57e)$$

dove s è lo spin della particella.

Per determinare questi generatori infinitesimi, si parte dalle parentesi di commutazione tra i generatori dell'algebra di Lie del gruppo di Galileo [38]:

$$\begin{aligned} [M, N_i] &= \epsilon_{ij} N_j, & [N_i, N_j] &= \epsilon_{ij} dI, & [H, P_i] &= 0, & [P_i, P_j] &= 0 \\ [M, P_i] &= \epsilon_{ij} P_j, & [N_i, P_j] &= \delta_{ij} mI, & [M, H] &= 0, & [N_i, H] &= P_i \end{aligned} \quad (5.58)$$

⁷Sia Bose [37], sia Grigore [42] esaminano in totale 4 casi: per ottenere i primi basta fissare $S = 0$, mentre per ottenere i secondi bisogna fissare $\lambda \neq 0$.

dove M è il generatore delle rotazioni, N_i i generatori dei *boost* lungo le due direzioni spaziali, P_i i generatori delle traslazioni spaziali ed H il generatore delle traslazioni temporali, I l'identità; d ed m sono numeri reali da determinare caso per caso⁸.

A questo punto, detto, ad esempio, $v = (1, 0, v, 0) \in G$, si sviluppa $U(v)$ con v infinitesimo:

$$(U(v)f)(p) \simeq \left(1 - i \frac{\lambda}{2\mu} (v \wedge p) + \mu v_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \mu v_2 \frac{\partial}{\partial p_2} \right) f(p)$$

da cui (5.57d) e (5.57e).

Analogo ragionamento lo si può fare anche per la rappresentazione (5.56). In questo caso i generatori infinitesimi risultano essere:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\mu} (p_1^2 + p_2^2) & P_j &= p_j \\ M &= is + p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} & N_j &= \mu \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

Si può notare che gli unici generatori a cambiare da un caso all'altro sono gli N_i .

5.4.6 Il gruppo di Galileo in 1 dimensione

Come è stato già visto nella Sezione 4.1, è possibile determinare il fattore di fase anche nel caso del gruppo galileiano in 1 dimensione: in quell'occasione si trovò:

$$\xi(r, s) = \frac{1}{2} (\alpha_r v_s - \alpha_s v_r)$$

con la rappresentazione proiettiva unitaria definita da

$$U(r)U(s) = e^{i\mu\xi(r,s)} U(rs)$$

dove μ è un numero reale, mentre il generico elemento r del gruppo di Galileo G è definito da

$$r = (\alpha_r, v_r)$$

con α_r il parametro della traslazione lungo la retta, v_r la velocità relativa tra i sistemi. Il prodotto tra due elementi r, s di G è poi definito da:

$$rs = (\alpha_r, v_r) \cdot (\alpha_s, v_s) = (\alpha_r + \alpha_s, v_r + v_s)$$

⁸Per la 5.55 si trova che $m = \mu$, $d = -i\lambda$

Si può, invece, considerare, come in [40], un elemento di G definito in maniera più generale

$$r = (u_r, v_r, \eta_r)$$

dove u_r è il parametro della traslazione lungo la retta, v_r la velocità relativa, η_r il parametro della traslazione temporale. In questo caso l'esponente di fase risulta essere:

$$\xi_\eta(r, s) = \frac{a_1}{2}(a_r v_s - a_s v_r + \eta_r v_r v_s) + \frac{a_2}{2}(u_r \eta_s - u_s \eta_r - \eta_r \eta_s v_r) \quad (5.59)$$

dove $a_{1,2}$ sono numeri reali, con la rappresentazione proiettiva definita da:

$$U(r)U(s) = e^{i\xi_\eta(r,s)} U(rs)$$

In questo caso, detto $R(X)$ il generatore infinitesimo dell'operatore X , è possibile determinare la dipendenza temporale dei generatori, utilizzando la più generale formula:

$$\frac{d}{dt} R_t(X) = K R_t([H, X]) \quad (5.60)$$

con la condizione che

$$R_{t=0}(X) = R(X)$$

dove K è una costante complessa, H il generatore delle traslazioni temporali. Siano, quindi, H , P , N i generatori di traslazioni temporali, traslazioni spaziali, *boost* rispettivamente; i loro generatori infinitesimi dipendenti dal tempo saranno rispettivamente:

$$\begin{aligned} R_t(H) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + fx + V_0 \\ R_t(P) &= -i\hbar\partial_x - ft \\ R_t(N) &= mx - i\hbar t\partial_x - \frac{1}{2}ft^2 \end{aligned} \quad (5.61)$$

dove \hbar è l'azione di Plank, $m = a_1$ (massa della particella), $f = a_2$ (forza esterna) sono numeri reali, V_0 ⁹ un reale che può essere interpretato come

⁹Si determina che

$$V_0 = \frac{a_3}{2a_1} = R(H) - a_2x + \frac{\hbar^2}{2a_1}\partial_x^2$$

dove a_3 è il numero reale che etichetta la rappresentazione di C_3 , elemento di Casimir dell'algebra di Lie \mathfrak{g} del gruppo G definito da:

$$C_3 = 2HZ_1 - 2KZ_2 - P^2$$

con $Z_{1,2}$ elementi centrali dell'algebra di Lie dell'estensione del gruppo di Galileo. (vedi [40])

l'energia potenziale, t il tempo ed x la coordinata spaziale.

5.5 Gruppo di Poincaré

Il gruppo di Poincaré è la generalizzazione dei gruppi euclidei nello spazio-tempo di Minkowski; esso assume una grande importanza nella teoria della relatività di Einstein in quanto risulta la generalizzazione del gruppo di Lorentz, il gruppo costituito dalle omonime trasformazioni del quadrispazio.

5.5.1 Trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz furono inizialmente introdotte per rimuovere le contraddizioni esistenti tra elettromagnetismo e meccanica classica e spiegare i risultati nulli dell'esperimento di Michelson-Morley tramite l'introduzione del fenomeno della contrazione delle lunghezze. Sotto di esse le equazioni dell'elettromagnetismo rimangono invarianti nel passaggio tra due sistemi di riferimento tra loro in moto relativo.

Scoperte da Joseph Larmor¹⁰ nel 1897, vennero attribuite a Lorentz¹¹ nel 1905 dal matematico francese Henri Poincaré¹², quando ne stabilì anche la struttura di gruppo. Tali trasformazioni, che generalizzano le trasformazioni di Galileo, sono alla base della formulazione matematica della teoria della relatività ristretta di Einstein: in questa teoria queste trasformazioni discendono immediatamente da quelle di Galileo introducendo il postulato di invarianza della velocità della luce.

La più semplice trasformazione di Lorentz discende dalla trasformazione di Galileo per una particella localizzabile in \mathbb{R} (vedi Sezione 4.1.2) e viene

¹⁰J.Larmor *A Dynamical Theory of the Electric and Luminiferous Medium. Part III. Relations with Material Media*, Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Series A, vol.190, pag.205

¹¹La versione definitiva delle trasformazioni di Larmor, oggi note come trasformazioni di Lorentz, compaiono su *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light*, Proceedings of the Academy of Sciences of Amsterdam, IV, pag.669 (1904)

¹²Il gruppo prende il nome dal matematico francese Henri Poincaré che per primo, in *Sur la dynamique de l'électron* sui Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1905), evidenzia la struttura di gruppo delle trasformazioni dello spazio proposte da Lorentz. La versione in italiano, *Sulla dinamica dell'elettrone*, compare nella raccolta *Scritti di Fisica-Matematica* di Henri Poincaré, a cura di Uboldo Sazo

descritta dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (5.62)$$

Prima di definire una più generale trasformazione di Lorentz, però, è necessario introdurre alcune definizioni preliminari:

Definizione 5.1.

Un *evento* sarà indicato da un vettore x^μ nel quadrispazio di Minkowski, dove

$$x^\mu = \begin{cases} ct & \mu = 0 \\ x^i & \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto.

Si definisce, ora, un *tensore metrico* $g^{\mu\nu}$ diagonale di elementi ± 1 , come nel caso dei gruppi pseudo-ortogonali (vedi Sezione 5.2), che nel caso dello spazio di Minkowski presenterà solo 3 segni uguali (3 positivi ed uno negativo o viceversa)¹³.

In termini del tensore metrico, si può definire la *metrica di Minkowski* come:

$$|x|^2 = x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (5.63)$$

Utilizzando tale tensore metrico, è semplice dare una definizione per la trasformazione di Lorentz:

Definizione 5.2.

Una *trasformazione omogenea di Lorentz* è una trasformazione continua lineare Λ delle coordinate del quadrispazio di Minkowski:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (5.64)$$

che lascia invariata la forma quadratica $x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$.

¹³Si possono avere, quindi, due matrici simmetriche diagonali come tensore metrico per il quadrispazio di Minkowski, entrambe equivalenti:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vale, inoltre, la seguente relazione tra una trasformazione di Lorentz Λ ed il tensore metrico g :

$$\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g^{-1} \quad (5.65)$$

Calcolando il determinante di ambo i lati si ottiene $(\det \Lambda)^2 = 1$, da cui $\det \Lambda = \pm 1$. Si scelgono le trasformazioni con determinante $+1$: per queste ultime varrà la seguente relazione

$$\det \Lambda = \Lambda^0_{\mu} \Lambda^1_{\nu} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\sigma} \epsilon^{\mu\nu\gamma\sigma} = 1$$

dove $\epsilon^{\mu\nu\gamma\sigma}$ è un tensore 4-dimensionale totalmente antisimmetrico, con $\epsilon^{0123} = 1$. Quest'ultima condizione può essere riscritta come:

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \Lambda^{\gamma}_{\lambda} \Lambda^{\delta}_{\sigma} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (5.66)$$

Si noti che, ponendo $\lambda = \sigma = 0$ in $g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\lambda} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = g_{\lambda\sigma}$ (un modo esteso di scrivere la (5.65)), si ottiene la condizione

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_i (\lambda^i_0)^2 = 1$$

Ciò implica $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$, e quindi $\Lambda^0_0 \geq 1$ o $\Lambda^0_0 \leq -1$. Le due soluzioni rappresentano soluzioni disgiunte dell'asse reale per Λ^0_0 . Poiché $\Lambda^0_0 = 1$ vale per l'identità, la continuità richiede che tutte le trasformazioni di Lorentz proprie abbiano:

$$\Lambda^0_0 = 1 \quad (5.67)$$

A questo punto si può definire il gruppo di Lorentz:

Definizione 5.3.

L'insieme di tutte le trasformazioni proprie di Lorentz $\{\Lambda\}$ che soddisfano alle condizioni (5.65)-(5.67) formano il *gruppo di Lorentz proprio* o semplicemente *gruppo di Lorentz*, $G_{\tilde{L}_+}$.

Teorema 5.1.

Un generico elemento del gruppo $G_{\tilde{L}_+}$ può essere unicamente scritto nella forma fattorizzata:

$$\Lambda = R(\alpha, \beta, 0) L_3(\eta) R(\phi, \theta, \psi)^{-1} \quad (5.68)$$

dove $L_3(\eta)$ è un *boost* di Lorentz lungo l'asse positivo z con velocità $v = c \tanh \eta$, $0 \leq \eta < \infty$, e con:

$$\begin{aligned} A^0 &= \cosh \eta & A^1 &= \sinh \eta \sin \beta \cos \alpha \\ A^3 &= \sinh \eta \cos \theta & A^2 &= \sinh \eta \cos \beta \sin \alpha \end{aligned}$$

dove $\Lambda^{\mu}_0 = A^{\mu}$.

Relazione tra $G_{\tilde{L}_+}$ ed $SL(2)$

In analogia alla connessione fatta tra il gruppo $SO(3)$ delle rotazioni ed il gruppo $SU(2)$, suo gruppo coprente (vedi Sezione 5.3), anche per il gruppo di Lorentz $G_{\tilde{L}_+}$ esiste una corrispondenza con, questa volta, il gruppo $SL(2)$. Ad un punto dello spaziotempo x^μ si associa una matrice 2×2 , hermitiana:

$$x^\mu \rightarrow X = \sigma_\mu \cdot x^\mu \quad (5.69)$$

dove σ_0 è l'identità e σ_i , con $i = 1, 2, 3$, le matrici di Pauli. Quindi, esplicitamente, X risulta

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

Una trasformazione di Lorentz Λ su un quadrivettore x^μ induce una trasformazione lineare sulla matrice X che ne conserva l'hermiticità ed il determinante:

$$X \xrightarrow{\Lambda} X' = AXA^\dagger \quad (5.71)$$

dove A è una matrice 2×2 dipendente da Λ che soddisfa alla

$$\det A \det A^\dagger = |\det A|^2 = 1$$

La matrice A è determinata a meno di un fattore di fase. È naturale fissare tale fase scegliendo

$$\det A = 1$$

Si stabilisce, così, una corrispondenza tra $G_{\tilde{L}_+}$ (anche indicato come $SO(3, 1)$) ed $SL(2)$. Si noti che una matrice generica di $SL(2)$ contiene 6 parametri arbitrari reali, ovvero lo stesso numero di una generica trasformazione di Lorentz propria. La parte destra della (5.71), così come il $\det(A)$, sono forme quadratiche negli elementi della matrice A . Segue che la matrice A è determinata a meno del segno.

Quindi, per ogni $\Lambda \in G_{\tilde{L}_+}$ si associano due matrici $\pm A(\Lambda)$ di $SL(2)$: il gruppo $SL(2)$ è così il gruppo coprente universale di $SO(3, 1)$ ed induce una rappresentazione proiettiva di $SO(3, 1)$ con moltiplicatore $\omega = \pm 1$, come nel caso del gruppo delle rotazioni (vedi Sezione 5.3). Una conclusione di tal genere era attesa, in quanto il gruppo di Lorentz è il prodotto semidiretto tra il gruppo delle rotazioni ed il gruppo costituito dalle trasformazioni di Lorentz omogenee (Teorema 5.1, (5.68)): poiché una trasformazione di Lorentz omogenea è una particolare trasformazione pseudo-ortogonale (Sezione 5.2), il cui gruppo per uno spazio di dimensione 3 o superiore non presenta rappresentazioni proiettive, la rappresentazione proiettiva di $G_{\tilde{L}_+}$ deve avere, come per il gruppo delle rotazioni, un moltiplicatore tipo quello per il gruppo $SO(3)$.

5.5.2 Il gruppo di Poincaré

Le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni pseudo-ortogonali omogenee in uno spazio quadri-dimensionale, lo spazio di Minkowski. La richiesta che lo spazio-tempo sia omogeneo richiede l'invarianza delle leggi della fisica sotto traslazioni 4-dimensionali $T(a)$, che sono trasformazioni non omogenee:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (5.72)$$

che sono assolutamente identiche alle traslazioni in 2 e 3 dimensioni.

Quando si combinano tutte le simmetrie spazio-temporali dello spazio-tempo 4-dimensionale in un unico gruppo di simmetria generale, si ottiene la generalizzazione del gruppo euclideo:

Definizione 5.4.

L'insieme delle trasformazioni dello spazio di Minkowski costituito dalle traslazioni e dalle trasformazioni proprie di Lorentz e dai loro prodotti forma un gruppo, $G_{\bar{P}}$, detto *gruppo di Poincaré* o *gruppo di Lorentz non omogeneo*.

Un generico elemento del gruppo di Poincaré è indicato dalla coppia (a, Λ) ed induce la seguente trasformazione delle coordinate:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (5.73)$$

La regola di moltiplicazione nel gruppo è definita da:

$$(a_2, \Lambda_2)(a_1, \Lambda_1) = (\Lambda_2 a_1 + a_2, \Lambda_2 \Lambda_1) \quad (5.74)$$

dove è la trasformazione (a_1, Λ_1) ad agire per prima sulle coordinate.

Come nel caso delle trasformazioni pseudo-ortogonali non omogenee (Sezione 5.2, eq.(5.2b)), anche per una generica trasformazione di $G_{\bar{P}}$ si può fornire una rappresentazione matriciale:

$$g(a, \Lambda) = \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & a^0 \\ & & & & a^1 \\ & \Lambda^\mu{}_\nu & & & a^2 \\ & & & & a^3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (5.75)$$

Teorema 5.2.

Un elemento generico del gruppo di Poincaré può essere scritto come il prodotto tra una traslazione $T(a)$ ed una trasformazione di Lorentz propria Λ :

$$(a, \Lambda) = T(a)\Lambda \quad (5.76)$$

dove $T(a) = (b, I)$, con E matrice identità, $\Lambda = (0, \Lambda)$.

Teorema 5.3.

Siano Λ un'arbitraria trasformazione propria di Lorentz, $T(a)$ una traslazione quadri-dimensionale. Allora

- i. La trasformata della traslazione secondo Lorentz è un'altra traslazione:

$$\Lambda T(a) \Lambda^{-1} = T(\lambda a)$$

- ii. Il gruppo delle traslazioni forma un sottogruppo invariante del gruppo di Poincaré.

Generatori ed algebra di Lie

Il gruppo di Poincaré ha dieci generatori, uno per ognuno dei suoi sottogruppi indipendenti ad un parametro. Si considerano innanzitutto quelli associati alle traslazioni infinitesime:

Definizione 5.5.

I generatori covarianti P_μ delle traslazioni sono definiti dalla seguente espressione:

$$T(\delta a) = I - i\delta a^\mu P_\mu \quad (5.77)$$

dove I è la matrice identità, δa^μ sono le componenti di un quadri-vettore arbitrariamente piccolo. I corrispondenti generatori controvarianti sono definiti da $P^\mu = g^{\mu\nu} P_\nu$.

Un certo generatore delle traslazioni è identificabile, in fisica, come l'operatore del momento angolare in una data direzione.

Come al solito le traslazioni finite possono essere espresse in termini dei generatori grazie agli operatori esponenziali:

$$T(a) = e^{-ia^\mu P_\mu}$$

Sotto l'azione del gruppo di Lorentz, i generatori P_μ trasformano come un 4-vettore:

$$\Lambda P_\mu \Lambda^{-1} = P_\nu \Lambda^\nu{}_\mu, \quad \forall \Lambda \in G_{\tilde{L}_+}$$

Definizione 5.6.

I generatori covarianti $J_{\mu\nu}$ delle trasformazioni di Lorentz sono tensori antisimmetrici definiti dalle seguenti espressioni per le *rotazioni* infinitesime nello spazio di Minkowski:

$$\Lambda(\delta\omega) = I - \frac{i}{2} \delta\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \quad (5.78)$$

dove $\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega_{\mu\nu}$ sono parametri anti-simmetrici infinitesimi. I corrispondenti generatori controvarianti sono:

$$J^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} J_{\lambda\sigma} g^{\sigma\nu}$$

In fisica, i generatori del tipo $K_m = J_{m0}$, con $m = 1, 2, 3$, sono i generatori delle tre trasformazioni speciali di Lorentz, i tre *boost* di Lorentz che mescolano la coordinata temporale con una coordinata spaziale.

La trasformazione di Lorentz, come prima, può essere descritta con l'operatore esponenziale

$$\Lambda(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}} \quad (5.79)$$

dove $\omega^{\mu\nu}$ è un tensore anti-simmetrico a 6 parametri di rango 2. Quindi:

- i. Sia $\Lambda(\omega)$ una trasformazione propria di Lorentz parametrizzata come nell'equazione (5.79), e sia Ω un'altra trasformazione di Lorentz arbitraria; allora

$$\Omega\Lambda(\omega)\Omega^{-1} = \Lambda(\omega'), \quad \text{dove } \omega'^{\mu\nu} = \Omega^\mu{}_\lambda \Omega^\nu{}_\sigma \omega^{\lambda\sigma}$$

- ii. I generatori $J_{\mu\nu}$ trasformano, sotto l'azione di Ω , nel modo seguente

$$\Omega J_{\mu\nu} \Omega^{-1} = J_{\lambda\sigma} \Omega^\lambda{}_\mu \Omega^\sigma{}_\nu$$

Quest'ultima equazione stabilisce che, sotto l'azione di una trasformazione propria di Lorentz, $J_{\mu\nu}$ si trasforma come i componenti di un tensore di rango 2.

Quindi, l'algebra di Lie del gruppo di Poincaré è data dalle seguenti relazioni:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (5.80a)$$

$$[P_\mu, J_{\lambda\sigma}] = i(P_\lambda g_{\mu\sigma} - P_\sigma g_{\mu\lambda}) \quad (5.80b)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(J_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} - J_{\sigma\nu} g_{\mu\lambda} + J_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - J_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) \quad (5.80c)$$

da confrontarsi con le (5.9).

5.5.3 Origine del fattore di fase del gruppo di Galileo

In questa sezione siamo interessati a scoprire l'origine del fattore di fase non banale del gruppo di Galileo [39].

Sia $\omega(r, s)$ un fattore di fase su $G_{\bar{P}}$, gruppo di Poincaré:

$$\omega(r, s) = e^{i\xi(r,s)}$$

$\omega(r, s)$ è necessariamente banale, ovvero esiste una funzione $\zeta(r)$ su $G_{\bar{P}}$ tale che

$$\xi(r, s) = \Delta[\zeta]_{r,s} = \zeta(rs) - \zeta(r) - \zeta(s) \quad (5.81)$$

L'esponente $\xi(r, s)$ conduce ad un moltiplicatore non banale nel limite non relativistico $c \rightarrow \infty$. Vediamo come si deve procedere per mostrare tale fatto. Innanzitutto si scrive il generico elemento del gruppo di Poincaré in forma matriciale:

$$g(a, \Lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda_\nu^\mu & a^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_\nu^\mu & a^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_\nu^\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice di Lorentz Λ_ν^μ può essere ulteriormente decomposta nel prodotto tra un puro *boost* ed una rotazione:

$$\Lambda = \mathcal{L}(\vec{v}) \cdot R$$

dove

$$\mathcal{L}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & & & \frac{v_k}{c} \gamma \\ & \delta_{ik} + \frac{v_i v_k}{v^2} (\gamma - 1) & & \\ & & & \\ \frac{v_i}{c} \gamma & & & \end{pmatrix}, \quad \gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad RR^T = R^T R = I$$

Ed infine

$$\begin{pmatrix} \Lambda_\nu^\mu & a^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}(\vec{v}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

A questo punto si moltiplica la (5.82) per X a destra ed X^{-1} a sinistra, dove

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

quindi si passa al limite $c \rightarrow \infty$ e si identificano $a^0 \rightarrow c\tau$, $\vec{a} \rightarrow \vec{u}$.

Ora si può spiegare semplicemente l'emergenza del fattore di fase legato alla massa della particella. Si pone

$$\zeta(g(a, \lambda)) = ca^0$$

nella (5.81):

$$\begin{aligned} \xi(r, s) &= c((\Lambda_r)_\mu^0 a_s^\mu + a_r^0) - ca_r^0 - ca_s^0 = c((\Lambda_r)_\mu^0 - \delta_\mu^0) a_s^\mu = \\ &= c^2(\gamma_r - 1)\gamma_s + \gamma_r (v_r)_i (R_r)_{ik} (u_s)_k \xrightarrow{c \rightarrow \infty} \frac{v_r^2}{2} \tau_s + \vec{v}_r \cdot R_r \vec{u}_s \end{aligned}$$

da confrontarsi con la (5.33).

5.6 Estensione dell'approccio di Doebner e Mann a dimensioni superiori

Conclusione del lavoro di Doebner e Mann [40] (e della Sezione 5.4.6 - vedi (5.61)), è la possibilità di determinare i generatori infinitesimi dipendenti dal tempo in una dimensione. In questa sezione, quindi, estendiamo l'approccio di Doebner e Mann al gruppo di Galileo in dimensioni superiori: innanzitutto si determinano i generatori infinitesimi del gruppo di Galileo dipendenti dal tempo, quindi si esamina la possibilità di determinare da questi una rappresentazione del gruppo che sia essa stessa dipendente esplicitamente dal tempo. Di quest'ultima se ne studiano le proprietà.

Operiamo in questo modo:

Consideriamo il caso del gruppo di Galileo in 2 dimensioni, ed in particolare i generatori infinitesimi (5.57) e le parentesi di commutazione (5.58). Applicando la (5.60), si trova che $R_t(H) = R(H)$, $R_t(P_i) = R(P_i)$, $R_t(M) = R(M)$, mentre per gli ultimi due generatori si ottiene:

$$\frac{d}{dt}R_t(N_i) = -iR_t(P_i) = -iR(P_i)$$

e quindi

$$R_t(N_i) = -iR(P_i)t + R(N_i) = -ipt + R(N_i) \quad (5.83)$$

e per ciascuna delle due componenti si ottiene

$$N_1 = -ip_1t + \mu \frac{\partial}{\partial p_1} - i \frac{\lambda}{2\mu} p_2$$

$$N_2 = -ip_2t + \mu \frac{\partial}{\partial p_2} - i \frac{\lambda}{2\mu} p_1$$

per la rappresentazione (5.55), mentre per la rappresentazione (5.56) si ottiene

$$N_i = -ip_it + \mu \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Quindi, detto $v = (1, 0, v, 0) \in G$, l'operatore unitario corrispondente, dipendente dal tempo, sarà:

$$\begin{aligned} & \left(1 - i \langle p | v \rangle t - i \frac{\lambda}{2\mu} (v \wedge p) + \mu v_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \mu v_2 \frac{\partial}{\partial p_2} \right) f(p) \simeq \\ & \simeq \left(1 - i \langle p | v \rangle t - i \frac{\lambda}{2\mu} (v \wedge p) \right) \left(1 + \mu v_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \mu \frac{\partial}{\partial p_2} \right) f(p) \simeq \\ & \simeq e^{-i \langle p | v \rangle t - i \frac{\lambda}{2\mu} (v \wedge p)} f(p + \mu v) = (U_t(v)f)(p) \end{aligned}$$

per la rappresentazione (5.55), e

$$(U_t(v)f)(p) = e^{-i\langle p|v\rangle t} f(p + \mu v)$$

per la rappresentazione (5.56). Quindi la rappresentazione di Galileo dipendente dal tempo in 2 dimensioni per il caso $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $S = 0$ e per il caso $\mu \neq 0$, $\lambda = S = 0$, e per il gruppo di Galileo in 3 dimensioni¹⁴ risulta essere

$$(U_t(r)f)(p) = e^{-i\langle p|v_r\rangle t} (U(r)f)(p) \quad (5.84)$$

Quindi, per ogni $r \in G$, l'operatore unitario corrispondente $U_t(r)$ dipendente dal tempo sarà dato dall'operatore unitario $U(r)$ a meno di un fattore di fase dipendente dal tempo, ovvero della funzione $e^{-i\langle p|v_r\rangle t}$.

Dalla teoria sulle rappresentazioni proiettive di Bargmann [7], sappiamo che la rappresentazione indipendente dal tempo del gruppo di Galileo segue questa legge:

$$U(r)U(s) = \omega(r, s)U(rs)$$

dove $\omega(r, s) = e^{i\xi(r, s)}$ è una funzione delle coordinate di r , s di modulo 1. A questo punto proviamo, quindi, a capire se la nuova fase $e^{i\langle p|v\rangle}$ nella rappresentazione introducesse un ulteriore fattore di fase proiettivo. Si procede calcolando $U_t(r)U_t(s)$:

$$\begin{aligned} ((U_t(r)U_t(s))f)(p) &= e^{-i\langle p|v_r\rangle t} U_t(s)((U(r)f)(p)) \\ &= e^{-i\langle p|v_r\rangle t} e^{-i\langle W_r^{-1}(p+\mu v_r)|v_s\rangle t} \omega(r, s)(U(rs)f)(p) \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} (U_t(rs)f)(p) &= e^{-i\langle p|v_{rs}\rangle t} (U(rs)f)(p) \\ &= e^{-i\langle p|v_r\rangle t} e^{-i\langle p|W_r v_s\rangle t} (U(rs)f)(p) \end{aligned}$$

Dal confronto tra le ultime due si trova che:

$$((U_t(r)U_t(s))f)(p) = \phi(r, s, t) \omega(r, s) (U_t(rs)f)(p) \quad (5.85a)$$

dove $\omega(r, s)$ è l'usuale moltiplicatore, mentre $\phi(r, s, t)$ è definito da:

$$\phi(r, s, t) = e^{-i\mu\langle v_r|W_r v_s\rangle t} = e^{i2\mu\xi_t(r, s)} \quad (5.85b)$$

con

$$\xi_t(r, s) = -\frac{1}{2} \langle v_r | W_r v_s \rangle t \quad (5.85c)$$

funzione bilineare continua nelle coordinate di r , s , che soddisfa alle (4.16), (4.15) come qualsiasi esponente di fase proiettivo.

¹⁴Questo caso è equivalente al gruppo di Galileo in 2 dimensioni con $\mu \neq 0$, $\lambda = S = 0$

5.6.1 Interpretazione fisica degli esponenti di fase

L'esponente di fase del gruppo di Galileo (5.33), con $\hbar = 1$:

$$\xi(r, s) = \mu \frac{1}{2} (\langle u_r | W_r v_s \rangle - \langle v_r | W_r u_s \rangle + \eta_s \langle v_r | W_r v_s \rangle)$$

con μ massa della particella, ha le dimensioni di un'azione, e può essere associata con l'azione della particella nel sistema di riferimento rs . Infatti, siano $U(r) = (1, 0, 0, u)$, $U(s) = (0, 0, v, 0)$, allora $\xi(r, s) = \frac{\mu}{2} \langle u | v \rangle$, con $U(rs) = (1, 0, v, u)$, con rs la trasformazione di Galileo che fa passare da un sistema inerziale fisso ad uno in moto con velocità relativa v e con l'origine spostata di una traslazione spaziale u .

Allo stesso modo, per capire il significato fisico dell'esponente di fase (5.85b), si può esaminare un esempio semplice. Siano $r = (1, 0, v_r, 0)$, $s = (1, 0, v_s, 0)$ due elementi del gruppo di Galileo. Allora

$$(U_t(r)U_t(s)f)(p) = e^{-i(p+\mu v_r | v_s)t} e^{-i(p | v_r)t} e^{-i(p | v_r+v_s)t} e^{i\xi(r,s)} (U_t(rs)f)(p)$$

da cui $\phi(r, s, t) = e^{i\mu(v_r | v_s)t}$.

Sia ora Σ' un sistema di riferimento in moto relativo rispetto a Σ con velocità relativa v_0 . Allora l'energia di una particella di massa μ nel sistema di riferimento Σ' sarà data da

$$\frac{1}{2}\mu v'^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 + m \langle v | v_0 \rangle$$

Quindi, innanzitutto il termine $\langle p | v \rangle$ può essere interpretato come $\frac{1}{2}\mu v'^2 - \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$, e di conseguenza $\mu \langle v_r | v_s \rangle$ come la differenza tra il $\langle p | v \rangle$ calcolato nel sistema $z = rs$, e quello calcolato applicando prima r e poi s .

Capitolo 6

Una generalizzazione della teoria di Bargmann

Fino ad ora nelle rappresentazioni proiettive usuali di un dato gruppo G i moltiplicatori (esponenti di fase) sono stati considerati dipendenti solo dagli elementi del gruppo stesso (le loro coordinate canoniche) e non da altre variabili.

Esiste, però, la possibilità di generalizzare la teoria fin qui esposta inserendo negli esponenti di fase anche una dipendenza dal tempo t o dal punto p del quadrispazio M : tale tentativo è stato fatto da Jaroslaw Wawrzycki [49, 47], che propone una generalizzazione della teoria fondamentale delle rappresentazioni proiettive realizzata da Bargmann, inserendo la dipendenza del punto dello spazio all'interno degli esponenti di fase. Dopo averne date le motivazioni fisiche, Wawrzycki passa alla generalizzazione delle relazioni matematiche. In chiusura di capitolo si renderà conto di un possibile approfondimento nello studio di questa generalizzazione.

6.1 Osservazioni preliminari

In questa sezione vengono presentati gli argomenti con i quali Wawrzycki introduce la necessità di una generalizzazione della teoria delle rappresentazioni proiettive di Bargmann.

Nella meccanica quantistica e nella teoria quantistica dei campi le coordinate spaziotemporali sono semplicemente variabili classiche. Inoltre il problema circa la covarianza generale di meccanica quantistica e teoria quantistica dei campi emerge naturalmente come nella teoria classica:

- Qual'è l'effetto di un cambiamento delle coordinate dello spaziotempo in meccanica quantistica ed in teoria quantistica dei campi quando il cambiamento non forma una trasformazione di simmetria?

Si pensa che non ci sia alcuna sostanziale difficoltà se si riferisce la questione all'equazione d'onda. Semplicemente si tratta l'equazione d'onda come se fosse un'equazione classica. L'unico problema che si affronta è trovare la regola di trasformazione $\psi \rightarrow T_r \psi$ per la funzione d'onda ψ . Questa procedura, però, non risolve il problema formulato.

Il cuore del problema conduce allo spazio di Hilbert degli stati ed alla ricerca della rappresentazione T_r del gruppo covariante in esame. La questione trae origine dal fatto che la trasformazione covariante cambia la forma dell'equazione d'onda in maniera tale che ψ e $T_r \psi$ non appartengono allo stesso spazio di Hilbert, il che vuol dire che T_r non agisce nello spazio di Hilbert ordinario. Ciò non è compatibile con il paradigma che funziona con i gruppi di simmetria.

Motivazioni fisiche. Si esamina innanzitutto il problema di una particella libera nello spaziotempo galileiano. L'insieme delle soluzioni ψ dell'equazione di Schrödinger ammissibili in meccanica quantistica è dato da

$$\psi(\vec{x}, t) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \varphi(\vec{k}) e^{-i(\frac{t}{2m}\vec{k}\cdot\vec{k} - \vec{k}\cdot\vec{x})} d^3 k$$

dove $p = \hbar k$ è il momento lineare e $\varphi(\vec{k})$ è una funzione integrabile al quadrato. Le funzioni φ (funzioni d'onda nella *rappresentazione di Heisenberg*) formano uno spazio di Hilbert \mathcal{H} con prodotto interno:

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = \int \varphi_1^*(\vec{k}) \varphi_2(\vec{k}) d^3 k$$

La corrispondenza tra ψ e φ è uno a uno.

In generale tale costruzione fallisce se l'equazione di Schrödinger possiede una libertà di *gauge* non banale.

Nella precedente costruzione lo spazio di Hilbert \mathcal{H} è isomorfo allo spazio delle funzioni integrabili al quadrato $\varphi(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x}, 0)$. La connessione tra ψ e φ è data dall'operatore di evoluzione temporale $U(t)$:

$$U(t)\varphi = \psi$$

Si indica lo spazio delle funzioni iniziali φ sullo stesso iperpiano¹ simultaneo $t(X) = t$ con \mathcal{H}_t . Lo spazio delle funzioni $\psi(\vec{x}, t) = U(t)\varphi(\vec{x})$ isomorfo allo spazio di Hilbert \mathcal{H}_0 delle φ è detto *rappresentazione di Schrödinger*.

In generale la connessione tra $|\varphi(\vec{x})\rangle$ e $\psi(\vec{x}, t)$ non è unica, se la funzione d'onda possiede una libertà di *gauge*. Si considerino due stati $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle \in \mathcal{H}$; essi saranno equivalenti quando:

$$\begin{aligned} |\langle \varphi_1 | \varphi \rangle| &\equiv \left| \int \psi_1^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) d^3 x \right| = \\ |\langle \varphi_2 | \varphi \rangle| &\equiv \left| \int \psi_2^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) d^3 x \right| \end{aligned} \quad (6.1)$$

per ogni stato $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ e per tutti gli $\psi = U\varphi$. Sostituendo $|\varphi_1\rangle$ e poi $|\varphi_2\rangle$ per $|\varphi\rangle$ ed utilizzando, quindi, la disuguaglianza di Schwarz, si ottiene $|\varphi_2\rangle = e^{i\alpha} |\varphi_1\rangle$, con α costante. Per quel che riguarda ψ_1 e ψ_2 , la condizione (6.1) per

$$\psi_2 = e^{i\Lambda(t)} \psi_1$$

con un fattore di fase eventualmente dipendente dal tempo. Ovvero, insieme ad una soluzione ψ dell'equazione d'onda, anche $e^{i\Lambda(t)} \psi$ è soluzione dell'equazione d'onda opportunamente *gauge*-modificata: a priori non si può escludere l'esistenza di una tale evoluzione temporale, come già osservato da John von Neumann [8]. Lo spazio delle onde ψ che descrivono il sistema non può essere ridotto, nel modo descritto in precedenza, ad un fissato spazio di Hilbert \mathcal{H}_t , con t fissato. Così l'esistenza di una libertà di *gauge* non banale conduce alla seguente ipotesi:

- Due onde $\psi, e^{i\Lambda(t)} \psi$ sono quantisticamente indistinguibili

Conseguenza di tale ipotesi è il seguente postulato:

¹Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ scalari diversi da zero. Allora l'insieme S costituito da tutti i vettori:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

in \mathbb{R}^n tale che:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

è un sottospazio di \mathbb{R}^n detto **iperspazio**.

A. Un gruppo G è un gruppo di simmetria se e solo se, per $r \in G$, la trasformazione delle variabili indipendenti $x' = rx$ e la trasformazione delle funzioni d'onda $\psi' = T_r\psi$ trasforma l'equazione d'onda in una *gauge-equivalente*.²

La più immediata conseguenza è che, se G è un gruppo di simmetria inteso come nel precedente postulato, allora i fattori di fase della sua rappresentazione proiettiva sono, in generale, dipendenti dal tempo:

$$T_r T_s \psi = e^{i\xi(r,s,t)} T_{rs} \psi \quad (6.2)$$

Accettare il postulato A porta alla luce due importanti questioni:

- (a) una formulazione più generalmente covariante della meccanica quantistica;
- (b) i problemi causati dalla libertà di *gauge* nella teoria quantistica dei campi.

Il problema (a) nasce se si intende formulare una teoria delle rappresentazioni di un gruppo covariante³ in contrapposizione ad un gruppo di simmetria. I problemi sono originati dal fatto che il gruppo covariante trasforma la soluzione dell'equazione d'onda nella soluzione dell'equazione d'onda trasformata, ma l'equazione trasformata è differente in forma rispetto a quella iniziale.

²Questa è una riformulazione dell'usuale postulato

- Un gruppo G è un gruppo di simmetria se e solo se l'equazione d'onda è invariante sotto la trasformazione delle coordinate $x' = rx$ e la trasformazione della funzione d'onda $\psi' = T_r\psi$.

fatta da Jaroslaw Wawrzycki alla luce delle sue osservazioni [49], [46].

³Un gruppo G è un **gruppo covariante** di una rappresentazione, se:

- i. G trasforma le kpt della rappresentazione in kpt;
- ii. le kpt costituiscono la base di una rappresentazione fedele di G , cioè non esistono 2 o più elementi in G che producono mappature identiche di kpt;
- iii. G trasforma dpt in dpt.

Nella definizione sono stati utilizzati i concetti di **traiettoria cinematicamente possibile** (*kinematically possible trajectory*, kpt) e di **traiettoria dinamicamente possibile** (*dynamically possible trajectory*, dpt).

Si consideri una data rappresentazione matematica di una data teoria spaziotemporale. Una kpt di tale rappresentazione è un insieme dei valori delle componenti di tutte le variabili in un sistema di coordinate. Una kpt non soddisfa necessariamente le leggi della fisica della rappresentazione.

Ogni kpt che, invece, soddisfa alle leggi della fisica è detta dpt.

(Kip S.Thorne, David L.Lee, Alan P.Lightman, *Foundations for a theory of gravitation theories*, 1973, Physical Review D, vol.7, n.12, pag.3564)

Ovvero $T_r\psi$ non appartiene alla stessa *rappresentazione di Schrödinger* di ψ , e T_r non agisce nello spazio di Hilbert \mathcal{H}_0 degli stati. Ogni ragionevole trattamento dell'azione di un gruppo in meccanica quantistica si riduce alla rappresentazione unitaria del gruppo nello spazio di Hilbert degli stati, ma non esiste alcun modo naturale per trattare un gruppo covariante. Le difficoltà scompaiono nel momento in cui si parte dall'ipotesi e dal postulato A: gli stati sono le rispettive funzioni d'onda (*cross-sections*) appartenenti allo spazio $\mathbb{R}\Delta\mathcal{H}$ (*fibrato di Hilbert*, vedi Sezione A.4), mentre T_r trasforma la fibra \mathcal{H}_t su una fibra $\mathcal{H}_{r^{-1}t}$, agendo nello stesso spazio $\mathbb{R}\Delta\mathcal{H}$ come il gruppo di simmetria. Si noti che lo spazio degli stati degenera ad una fissata fibra \mathcal{H}_0 su $t = 0$ se la libertà di *gauge* degenera ad una fase costante.

I problemi generati dalla libertà di *gauge* nella teoria quantistica dei campi (vedi la questione (b)) sono di carattere generale. Ad esempio l'assenza di particelle vettoriali di massa nulla ad elicità pari ad 1, conseguenza della teoria delle rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré⁴. Ciò è in apparente contraddizione con i dati sperimentali, poiché il fotone è una particella vettoriale di elicità 1. Seguendo Łopuszański, il potenziale vettore non può essere un campo vettoriale, se si vuole che il prodotto interno sia definito positivo - insieme con la trasformazione delle coordinate si deve applicare anche la trasformazione di *gauge*, che rompe il carattere vettoriale del potenziale vettore. In pratica ciò vuol dire che ogni condizione di *gauge* che porta la teoria nella forma canonica tale che la procedura di quantizzazione può essere applicata consequenzialmente (con prodotto interno definito positivo nello spazio di Hilbert) rompe il carattere quadrivettoriale del potenziale elettromagnetico, come ad esempio la *gauge* di Coulomb. A questo punto, Jaroslaw Wawrzycki propone la seguente soluzione al problema:

Si introducono gli operatori del campo elettromagnetico reale locale $F_{\mu\nu}(x) = -F_{\nu\mu}(x)$ che è na combinazione lineare di un campo auto-duale e di un antiauto-duale con elicità rispettivamente +1 e -1. Se si introduce un potenziale vettore A_μ in un qualche sistema di Lorentz tale che

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

allora in un altro sistema di Lorentz, con Λ_μ^ν matrice della trasformazione di Lorentz corrispondente alla trasformazione di Poincaré r , si avrà:

$$A_\mu(x) \rightarrow U_r A_\mu(x) U_r^{-1} = (\Lambda^{-1})_\mu^\nu A_\nu(r^{-1}x) + \partial_\mu R(r, x), \quad \partial_\mu R \neq 0 \quad (6.3)$$

mentre $F_{\mu\nu}$ si trasforma come un campo tensoriale. Si conclude che la trasformazione di *gauge* del secondo tipo deve accompagnare la trasformazione

⁴J.Łopuszański, Fortschritte der Physik 26, 261, (1978); Hegerfeldt, *Remark on causality and particle localization*, Physical Review D, vol.10, n.10, pag.3320 (1974)

di Poincaré, o che la libertà di *gauge* è indispensabile nella costruzione del potenziale vettore nella teoria quantistica dei campi. Sia Ω lo stato di vuoto. Si definisce, allora, uno stato fotonico come

$$\psi_\mu(x) = A_\mu(x)\Omega$$

Segue immediatamente dalla (6.3) che

$$U_r\psi_\mu(x) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu\psi_\nu(r^{-1}x) + \partial_\mu\Theta(x) \quad (6.4)$$

dove $\partial_\mu\Theta(x)$ indica la distribuzione $\partial_\mu R(x)\Omega$. La precedente rappresentazione generata dai vettori generalizzati $\psi_\mu(x)$ induce una rappresentazione nello spazio di Hilbert appropriato. Si pongono, ora, $\varphi(x)$ e $\theta(x)$ come funzioni prova per *spalmare* le distribuzioni $\psi(x)$ e $\Theta(x)$ rispettivamente. Dalla (6.4) si trova la legge di trasformazione per φ_μ :

$$T_r\varphi_\mu(x) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu\varphi_\nu(r^{-1}x) + \partial_\mu\theta(x) \quad (6.5a)$$

Per costruzione, lo spazio delle funzioni prova è denso nel corrispondente spazio di Hilbert e la precedente rappresentazione T_r può essere unicamente estesa. Come per una teoria *gauge*-invariante, i due potenziali vettori quantistici $A_\mu(x)$ ed $A_\mu(x) + \partial_\mu\Phi(x)$ sono unitariamente equivalenti. I due stati fotonici differiscono per un gradiente, così come i due vettori corrispondenti $\varphi_\mu(x)$ e $\varphi_\mu(x) + \partial_\mu\phi(x)$ dovrebbero essere unitariamente equivalenti. Ciò vuol dire che è più adeguato considerare $\varphi_\mu(x) + \partial_\mu\phi(x)$ invece del solo $\varphi_\mu(x)$. Si scrive, quindi, lo stato $\varphi_\mu(x) + \partial_\mu\phi(x)$ come la coppia $\{\phi(x), \varphi_\mu(x)\}$. L'azione della rappresentazione T_r nello spazio delle coppie $\{\phi(x), \varphi_\mu(x)\}$ è:

$$T_r\{\phi(x), \varphi_\mu(x)\} = \{\phi(r^{-1}x) + \theta(r, x), U_r\varphi_\mu(x)\} \quad (6.5b)$$

dove U_r agisce come un'ordinaria trasformazione vettoriale:

$$U_r\varphi_\mu(x) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu\varphi_\nu(r^{-1}x)$$

Se si fanno agire, sulla coppia $\{\phi(x), \varphi_\mu(x)\}$, gli elementi T_r, T_s della rappresentazione, si ottiene:

$$T_rT_s\{\phi(x), \varphi_\mu(x)\} = T_{rs}\{\phi(x), \varphi_\mu(x)\} + \{\xi(r, s, x), 0\} \quad (6.5c)$$

dove

$$\xi(r, s, x) = \theta(r, x) + \theta(s, r^{-1}x) - \theta(rs, x) \quad (6.5d)$$

La (6.5c) definisce una rappresentazione proiettiva del gruppo di Poincaré, con esponente (6.5d) dipendente dal punto spazio-temporale x , risolvendo così il problema iniziale.

6.2 Esponenti locali ed esponenti infinitesimi

Sia \mathcal{H} lo spazio di Hilbert ed M il quadrispazio, con $p \in M$ un suo punto generico. Allora gli esponenti di fase locali, in base alle osservazioni precedenti, saranno dipendenti, oltre che dagli elementi del gruppo G in esame, anche dal punto del quadrispazio p per teorie relativistiche, o dal tempo t per teorie non-relativistiche. Si procede, pertanto, alla generalizzazione delle relazioni descritte nella Sezione 4.2.

Prima di tutto, però, si introduce il seguente teorema, utile per selezionare le rappresentazioni di un dato gruppo G .

Teorema 6.1.

Sia \mathcal{R}_r una rappresentazione proiettiva di un gruppo G . Per tutti gli r in un intorno opportunamente scelto \mathcal{N}_0 dell'identità e di G si può selezionare un insieme strettamente continuo di rappresentanti $U_r \in \mathcal{R}_r$. Ovvero per ogni insieme compatto $C \subset M$, ogni funzione d'onda ψ , ogni $r \in \mathcal{N}_0$ ed ogni positivo ε esiste un intorno \mathcal{N} di r tale che $\|U_s\psi - U_r\psi\|_p < \varepsilon$ se $s \in \mathcal{N}$, $p \in C$.

Sia $U_r \in \mathcal{R}_r$, selezionata come nel Teorema 6.1, una rappresentazione *ammissibile*. Si può costruire una nuova rappresentazione *ammissibile* a partire dalla funzione reale $\zeta(r, p)$:

$$U'_r = e^{i\zeta(r,p)} U_r \quad (6.6a)$$

La funzione $\zeta(r, p)$ sarà detta *strettamente continua* in r se e solo se per ogni insieme compatto $C \subset M$ e per ogni positivo ε esiste un intorno \mathcal{N}_0 di un fissato r_0 tale che:

$$|\zeta(r_0, p) - \zeta(r, p)| < \varepsilon$$

per tutti gli $r \in \mathcal{N}_0$ e per tutti i $p \in C$. Se, d'altra parte, U'_r è una rappresentazione *ammissibile*, allora la (6.6a) è verificata per una funzione reale $\zeta(r, p)$ differenziabile in p , poiché U'_r ed U_r appartengono allo stesso raggio. Poiché, quindi, sia $U_r\psi$, sia $U'_r\psi$ sono strettamente continue in r per ogni ψ , allora anche $\zeta(r, p)$ deve essere strettamente continua in r . Ovviamente si può sempre scegliere $\zeta(r, p)$ in maniera tale che, se $r = e$, allora $\zeta = 0$.

A questo punto, poiché $U_r U_s$ ed U_{rs} appartengono allo stesso raggio, allora

$$U_r U_s = e^{i\xi(r,s,p)} U_{rs} \quad (6.6b)$$

con $\xi(r, s, p)$ funzione reale differenziabile in p e continua in r, s (come nella teoria di Bargmann). Le proprietà di questa funzione sono:

$$\xi(e, e, p) = 0 \quad (6.7a)$$

$$\xi(r, s, p) + \xi(rs, g, p) = \xi(s, g, r^{-1}p) + \xi(r, sg, p) \quad (6.7b)$$

che sono facilmente verificabili a partire dalle (4.15) e (4.16).

Siano, ora, U'_r, U_r due rappresentazioni ammissibili; saranno dette equivalenti se e solo se esiste una funzione $\zeta(r, p)$ reale, continua in r e differenziabile in p , tale che la (6.6a) è verificata. Utilizzando la (6.6b) sia per U_r sia per U'_r si ottiene:

$$\xi'(r, s, p) = \xi(r, s, p) + \zeta(r, p) + \zeta(s, r^{-1}p) - \zeta(rs, p) \quad (6.8)$$

Quindi due esponenti locali ξ, ξ' si dicono equivalenti se e solo se la (6.8) è verificata, con $\zeta(r, p)$ strettamente continua in r e differenziabile in p . Anche quest'ultima è facilmente ricavabile a partire dalla (4.18a).

Seguono immediatamente:

$$\begin{aligned} \xi(r, e, p) &= 0, & \xi(e, g, p) &= 0 \\ \xi(r, r^{-1}, p) &= \xi(r^{-1}, r, r^{-1}p) \end{aligned}$$

Anche in questo caso si può introdurre un gruppo locale (covariante) H i cui elementi sono $\bar{r} = \{\theta(p), r\}$, con $\theta(p)$ funzione reale differenziabile in p , $r \in G$. La moltiplicazione in H , poi, è definita da:

$$\{\theta(p), r\} \cdot \{\theta'(p), r'\} = \{\theta(p) + \theta'(r^{-1}p) + \xi(r, r', p), rr'\} \quad (6.9)$$

da confrontarsi con la (4.20).

In questo caso l'inversa risulta essere

$$\{\theta(p), r\}^{-1} = \{-\theta(rp) - \xi(r, r^{-1}, rp), r^{-1}\}$$

Inoltre gli elementi $\{\theta(p), e\}$ formano un sottogruppo abeliano N di H . Ogni $\{\theta(p), r\} \in H$ può essere scritto come $\{\theta(p), r\} = \{\theta(p), e\} \cdot \{0, r\}$; lo stesso elemento, però, può anche essere scritto come $\{\theta(p), r\} = \{0, r\} \cdot \{\theta(rp), e\}$. In questo caso, quindi, H non è più il prodotto diretto tra N e G , come in Bargmann, ma il suo prodotto semidiretto, definito da (6.9). G comunque resta localmente isomorfo al gruppo fattore H/N , anche se H non è più un'estensione centrale di G , ma una sua *estensione semicentrale*.

Infine, siano ξ, ξ' due esponenti locali equivalenti. Allora la relazione $\xi' = \xi + \Delta[\zeta]$ sarà soddisfatta per una qualche ζ differenziabile in p e strettamente continua in r . Quindi le estensioni semicentrali H, H' connesse con ξ, ξ' rispettivamente saranno omomorfe, con omomorfismo dato da:

$$\theta'(p) = \theta(p) - \zeta(r, p), \quad r' = r \quad (6.10)$$

A questo punto, pur con alcune piccole variazioni rispetto a Bargmann, sempre realizzando una costruzione tipo Iwasawa, si procede come in *On Unitary Continuous Ray Representations*:

- Siano $d r$, $d^* r$ misure invarianti di Haar su G rispettivamente a sinistra ed a destra. Siano poi $\nu(r)$, $\nu^*(r)$ due funzioni infinitamente differenziabili su un fissato intorno \mathcal{N}_0 dell'identità $e \in G$ e con la proprietà:

$$\int_G \nu(r) d r = \int_G \nu^* d^* r = 1$$

Sia $\xi(r, s, p)$ un esponente locale ammissibile definito su \mathcal{N}_0 . Allora, nello stesso modo in cui si è fatto per il Lemma 4.3, si può costruire, a partire da $\xi(r, s, p)$, un esponente $\xi''(r, s, p)$ differenziabile ed equivalente al primo.

- Se due esponenti differenziabili ξ , ξ' sono equivalenti, cioè se

$$\xi' = \xi + \Delta[\zeta]$$

allora $\zeta(r, p)$ è differenziabile in r . (Lemma 4.4)

- Ogni esponente locale di un gruppo ad un parametro è equivalente a zero. (Lemma 4.5)
- Un esponente locale ξ di un gruppo di Lie G è detto *canonico* se $\xi(r, s, p)$ è differenziabile in tutte le variabili, e $\xi(r, s, p) = 0$ se r, s appartengono allo stesso sottogruppo ad un parametro. (Definizione 4.7)
- Ogni esponente locale ξ di un gruppo di Lie è equivalente ad un esponente canonico. (Lemma 4.6)
- Siano ξ , ξ' due esponenti locali differenziabili ed equivalenti di un gruppo di Lie G , con ξ canonico. Allora ξ' è canonico se e solo se $\xi' = \xi + \Delta[\Lambda]$, dove $\Lambda(r, p)$ è una forma lineare nelle coordinate canoniche di r , con $\Lambda(a, (\tau a)p)$ costante come funzione di τ , ovvero:

$$\mathbf{a}\Lambda(a, p) = \frac{d \Lambda(a, (\tau a)p)}{d \tau} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Lambda(a, (\varepsilon a)p) - \Lambda(a, p)}{\varepsilon} = 0 \quad (6.11)$$

Mentre la *sufficienza* della condizione può essere dimostrata come per il Lemma 4.7, per la *necessità* si segue il seguente ragionamento:

Poiché gli esponenti sono equivalente, $\xi'(r, s, p) = \xi(r, s, p) + \Delta[\zeta]$. Poiché sia ξ , sia ξ' sono funzioni differenziabili, anche ζ è differenziabile. Si pone $r = \tau a$, $s = \tau' a$. Poiché ξ e ξ' sono entrambi canonici,

allora $\xi(\tau a, \tau' a, p) = \xi'(\tau a, \tau' a, p) = 0$, ed in questo modo $\Delta[\zeta] = 0$. Applicando l'ultima formula in maniera ricorsiva si ottiene:

$$\zeta(\tau a, p) = \sum_{k=1}^n \zeta\left(\frac{\tau}{n} a, \left(-\frac{k}{n} \tau a\right) p\right)$$

Si applica il teorema di Taylor ad ogni somma e quindi si passa al limite $n \rightarrow +\infty$, ottenendo così:

$$\zeta(\tau a, p) = \int_0^\tau \zeta(a, (-\sigma a)p) d\sigma \quad (6.12)$$

dove ζ è una funzione differenziabile. Differenziando la (6.12) rispetto a τ in $\tau = 0$, si vede immediatamente che $\zeta(a, p)$ è lineare in a . Si suppone che le coordinate dello spazio tempo siano scelte in maniera tale che l'integrale della curva $p(x) = (xa)p_0$ è una linea di coordinate, il che è possibile per x opportunamente piccoli. Scelto $p(x)$, indicati suoi parametri come y_i , si ha:

$$\zeta(a, x, y_i) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \zeta(a, x - \sigma, y_i) d\sigma = \frac{1}{\tau} \int_{x-\tau}^x \zeta(a, z, y_i) dz$$

per ogni τ ed ogni x . Ciò, però, è possibile per la funzione $\zeta(a, x, y_k)$ continua in x (in questo caso differenziabile in x) se e solo se $\zeta(a, x, y_k)$ non dipende da x . Ciò vuol dire che anche $\zeta(a, x, y_k)$, concludendo così la dimostrazione.

Da adesso in poi si prenderanno in considerazione esponenti locali canonici; inoltre si punterà l'attenzione sul sottogruppo $\{\theta(p), r\} \in H$, con θ differenziabile, indicando tale sottogruppo sempre con la lettera H . Si inserisce questo sottogruppo in un gruppo di Lie a dimensione infinita con struttura modellata su uno spazio di Banach.

Si considera la chiusura \overline{H} di H nel senso della topologia in D , gruppo di tutti gli operatori unitari di uno spazio di Hilbert in un gruppo di Lie a dimensione infinita. Il sottogruppo \overline{H} ha localmente la struttura del prodotto semidiretto $\overline{N} \times_t G$. Ciò è conseguenza dei seguenti fatti:

- (1) \overline{N} è un sottogruppo normale di $\overline{H} = \overline{N \cdot G}$.
- (2) G ha dimensione finita, così $\overline{G} = G$.
- (3) Localmente (in un intorno \mathcal{N}), la moltiplicazione in D è data dalla formula di Baker-Hausdorff nell'algebra di Banach di D . Poiché \overline{N} è normale in \overline{H} , allora l'applicazione esponenziale

$$H \times \mathcal{L}^2(M, \mu, \mathcal{H}) \ni (\{\theta(p), r\}, \phi) \rightarrow e^{i\theta(p)} T_r \phi$$

converte localmente la moltiplicazione $\overline{N} \cdot S$ di \overline{N} per un sottoinsieme S di \overline{H} nella somma $\overline{N} + S$. Poiché G ha dimensione finita, e quindi localmente compatto, l'intorno \mathcal{N} può essere scelto in modo tale che localmente (nella chiusura di $\mathcal{N} + \mathcal{N}$) sia vera la seguente equazione:

$$\overline{N} + \overline{G} = \overline{N + G} = \overline{H}$$

- (4) \overline{N} locale (l'intersezione tra \overline{N} e $\overline{\mathcal{N}}$) ha una co-dimensione finita in $\overline{N + G}$ locale (l'intersezione tra $\overline{N + G}$ e $\overline{\mathcal{N} + \mathcal{N}}$) e così $\overline{N + G}$ si divide. Abbiamo, così, ad esempio in $\overline{\mathcal{N} + \mathcal{N}}$:

$$\overline{N} + \overline{G} = \overline{H} = \overline{N} \oplus G'$$

dove $\overline{G'} = G'$ e \oplus rappresenta la somma diretta. Da ciò segue che $G' = \overline{G}$ localmente. Ciò mostra che $\overline{H} = \overline{N} \times_t G$.

Poiché $\overline{H} = \overline{N} \times_t G$, ogni $h \in \overline{H}$ è rappresentabile nella forma ng , dove $n \in \overline{N}$, $g \in G$. Si noti che

$$(n_1 g_1)(n_2 g_2) = n_1 g_a n_2 g_a^{-1} g_1 g_2 = [n_1 (g_1 n_2 g_a^{-1})](g_1 g_2)$$

e che $g_1 n_2 g_a^{-1} \in \overline{N}$, essendo \overline{N} normale in \overline{H} .

Si indica l'automorfismo $n \rightarrow g n g^{-1}$ di \overline{N} con R_g . Il gruppo \overline{H} può essere localmente visto come un prodotto topologico di spazi di Banach $\overline{\mathfrak{N}} \times \mathfrak{G}$, uno dei quali, \mathfrak{G} , ha dimensione finita ed è isomorfo all'algebra di Lie di G . Il prodotto in \overline{H} può essere scritto come $(n_1, g_1)(n_2, g_2) = (n_1 R_{g_1}(n_2), g_1 g_2)$. Comunque, \overline{N} può essere visto localmente come lo spazio di Banach \mathfrak{N} con legge di moltiplicazione data dalla somma vettoriale in \mathfrak{N} .

A differenza della teoria di Bargmann, in cui si cerca l'algebra di Lie \mathfrak{h} del gruppo locale (covariante) H , in questo caso si va a cercare l'algebra di Lie \mathfrak{h} di \overline{H} : l'obiettivo comune è sempre la determinazione di un esponente infinitesimo, sempre una forma bilineare ed antisimmetrica negli elementi dell'algebra. Sia $\lambda \rightarrow a\lambda$ un sottogruppo ad un parametro di G . L'applicazione $(\lambda, n) \rightarrow (R_{\lambda a} n, \lambda a)$ dello spazio di Banach $\mathcal{R} \times \overline{\mathfrak{N}}$ nello spazio di Banach $\overline{\mathfrak{N}} \times \mathfrak{G}$ è continua. Di conseguenza, $\mathcal{R} \ni \lambda \rightarrow R_{\lambda a} n \in \overline{\mathfrak{N}}$ così come $\overline{\mathfrak{N}} \ni n \rightarrow R_{\lambda a} n$ sono continue. Quindi la funzione $\lambda \rightarrow R_{\lambda a} n$ può essere integrata su ogni intervallo compatto e

$$\tau \rightarrow (n_{\tau a}, \tau a) := \left(\int_0^\tau R_{\sigma a} n \, d\sigma, \tau a \right)$$

è un sottogruppo ad un parametro di \overline{H} con generatore (n, a) . A questo punto siamo in grado di ricostruire l'algebra.

Gli elementi di $H \subset \overline{H}$ sono rappresentabili nella forma $\{\alpha, r\}$, con $\alpha = \alpha(p)$ differenziabile in $p \in M$, e $r \in G$. Si consideri l'operatore $R_{\lambda a}$ precedentemente definito. La sua restrizione as $H \subset \overline{H}$ è data da

$$\alpha(p) \rightarrow (R_{\lambda a}\alpha)(p) = \alpha((\lambda a)^{-1}p)$$

Si possono ora calcolare esplicitamente le parentesi di Lie e l'identità di Jacobi per tutti gli elementi $\{\alpha(p), a\}$ della sottoalgebra $\mathfrak{h} \subset \overline{\mathfrak{h}}$ corrispondente al sottogruppo H :

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \{\mathbf{a}\beta - \mathbf{b}\alpha + \Xi(a, b, p), [a, b]\} \quad (6.13)$$

dove

$$\mathbf{a}\theta(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\theta((\varepsilon a)p) - \theta(p)}{\varepsilon}$$

con l'esponente infinitesimo Ξ che risulta essere

$$\begin{aligned} \Xi(a, b, p) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-2} & \left(\xi((\tau a)(\tau b), (\tau a)^{-1}(\tau b)^{-1}, p) + \xi(\tau a, \tau b, p) + \right. \\ & \left. + \xi((\tau a)^{-1}, (\tau b)^{-1}, (\tau b)^{-1}(\tau a)^{-1}p) \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

da confrontarsi con la (4.46b). Per verificare la (6.13) e la (6.14) si ricorda che:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(\tau \bar{a})(\tau \bar{b})(\tau \bar{a})^{-1}(\tau \bar{b})^{-1}}{\tau^2}$$

Il commutatore può quindi essere calcolato o sostituendo a ciascuno dei sottogruppi ad un parametro la sua espressione in H o l'operatore:

$$e^{i\alpha(p)} T_a$$

A questo punto, dalla legge associativa, come per la (4.47), è una semplice questione di calcolo ottenere:

$$\begin{aligned} \Xi([a, a'], a'', p) + \Xi([a', a''], a, p) + \Xi([a'', a], a', p) = \\ = \mathbf{a}\Xi(a, a'', p) + \mathbf{a}'\Xi(a'', a, p) + \mathbf{a}''\Xi(a, a', p) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Ovviamente $\Xi(a, b, p)$ rispetta ancora le proprietà (4.46c) in a, b .

Si può, ora, ricostruire l'algebra di Lie $\overline{\mathfrak{h}}$ dando esplicitamente $[\bar{a}, \bar{b}]$ per tutti gli $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{h} \subseteq \overline{\mathfrak{h}}$. Poiché \mathfrak{h} è denso in $\overline{\mathfrak{h}}$, l'esponente infinitesimo Ξ determina l'algebra $\overline{\mathfrak{h}}$ unicamente. Dalla teoria dei gruppi di Lie, però, la corrispondenza tra l'algebra $\overline{\mathfrak{h}}$ ed il gruppo locale \overline{H} è biunivoca, almeno localmente. Quindi,

la corrispondenza $\overline{H} \rightarrow \overline{\mathfrak{h}}$ tra il gruppo locale \overline{H} e l'algebra $\overline{\mathfrak{h}}$ è uno a uno. Inoltre, poiché l'esponente ξ determina la regola di moltiplicazione in H , e viceversa, allora segue che la corrispondenza $\xi \rightarrow \Xi$ tra l'esponente locale ξ e l'esponente infinitesimo Ξ è uno a uno, come già per Bargmann. Si noti che *esponente locale* si riferisce al fatto che $\xi(r, s, p)$ è definito per $r, s \in \mathcal{N}$ intorno fissato dell'identità $e \in G$, mentre $p \in M$ e non in un intorno del quadrispazio.

Resta, quindi, da determinare la regola per stabilire quando due esponenti infinitesimi Ξ, Ξ' sono equivalenti:

$$\Xi'(a, b, p) = \Xi(a, b, p) + \mathbf{a}\Lambda(a, p) - \mathbf{b}\Lambda(b, p) - \Lambda([a, b], p) \quad (6.16)$$

da confrontarsi con la (4.52), e dove $\Lambda(a, p)$ è lineare in a , mentre $\Lambda(a, (\tau b)p)$ è costante in τ se $a = b$.

Quindi due esponenti infinitesimi Ξ, Ξ' sono equivalenti se la relazione (6.16) è verificata.

Infine due esponenti locali canonici ξ, ξ' sono equivalenti se e solo se sono equivalenti i loro rispettivi esponenti infinitesimi Ξ, Ξ' .

I teoremi ed i lemmi validi per le sezioni precedenti continuano ad essere validi anche nella teoria generale, salvo per la dipendenza dal punto p del quadrispazio (o dal tempo t per teorie non-relativistiche) delle funzioni ξ, ζ, Ξ, Λ .

6.3 Un problema aperto

L'esistenza di una rappresentazione (6.5b)

$$T_r\{\phi(x), \varphi_\mu(x)\} = \{\phi(r^{-1}x) + \theta(r, x), U_r\varphi_\mu(x)\}$$

che dalla (6.5d) risulta una rappresentazione proiettiva del gruppo di Poincaré con esponente di fase dipendente dal punto x del quadrispazio, corregge l'assenza del fotone nella teoria delle rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré, introducendone la localizzabilità.

L'esponente di fase della (6.5d)

$$\xi(r, s, x) = \theta(r, x) + \theta(s, r^{-1}x) - \theta(rs, x) \quad (6.17a)$$

è però definito a partire da funzioni $\theta(r, x)$ non meglio specificate, di cui cioè non si conoscono le proprietà di continuità rispetto ad r e di differenziabilità rispetto ad x : conoscere tali proprietà, infatti, è importante per capire se l'esponente di fase (6.5d) è banale o meno, e quindi se la rappresentazione è equivalente ad una rappresentazione unitaria o proiettiva.

Nella generalizzazione proposta da Wawrzycki, lo studioso polacco generalizza le equazioni già determinate da Bargmann, introducendo la dipendenza dal punto del quadrispazio. In particolare generalizza la relazione di equivalenza tra due esponenti di fase ξ , ξ' , la (4.18a) con la (6.8):

$$\xi'(r, s, p) = \xi(r, s, p) + \zeta(r, p) + \zeta(s, r^{-1}p) - \zeta(rs, p) \quad (6.17b)$$

dove sia ξ , ξ' , sia ζ sono funzioni continue in r , s e differenziabili in p .

Ora, quando si impone l'invarianza delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger sotto trasformazioni di Galileo (vedi Sezione 5.4.3), si ottiene un esponente di fase definito come

$$\xi(r, s) = \tilde{\theta}(r, X) + \tilde{\theta}(s, r^{-1}X) - \tilde{\theta}(rs, X) \quad (6.17c)$$

dove $\tilde{\theta}(r, X) = \mu \left(\frac{1}{2}t \langle v | v \rangle - \langle v | x \rangle \right)$, continua nelle coordinate di r e differenziabile in X , con $X = (x, t)$, e dove è scomparsa la dipendenza da X presente nella $\tilde{\theta}$. Quindi:

1. Se $\theta(r, x)$ nella (6.17a) è differenziabile in x punto del quadrispazio, confortati dal risultato di Bargmann per il gruppo di Galileo (vedi Sezione 5.4.3), allora si dovrà concludere che o l'esponente di fase (6.5d) è equivalente ad un esponente banale, $\xi(r, s, x) \equiv 0$, o che è equivalente ad una funzione indipendente dal punto del quadrispazio x , $\xi(r, s, x) \equiv \xi'(r, s)$.
2. Se $\theta(r, x)$ nella (6.17a) non è differenziabile in x , allora bisognerà capire se $\theta(s, r^{-1}x) - \theta(rs, x)$ è in grado di eliminare la non differenziabilità di $\theta(r, x)$, rendendo così $\xi(r, s, x)$ differenziabile in x .

In conclusione è importante determinare la funzione θ nella (6.5d) per capire se l'esponente di fase:

- a) è equivalente ad un esponente banale, nel qual caso la teoria di Wawrzycki non avrebbe alcuna utilità nell'introdurre la localizzabilità del fotone;
- b) è equivalente ad un esponente indipendente dal punto del quadrispazio x , nel qual caso andrebbe a contraddire quanto noto per il gruppo di Poincaré (vedi 5.5.3) aprendo così una nuova linea d'indagine;
- c) è un esponente di fase di una rappresentazione proiettiva, ottenendo così il risultato cercato, ovvero la localizzabilità del fotone: infatti, dai risultati di Varadarajan [25, Teoremi 9.7 e 9.11], si conclude che, se esiste una rappresentazione proiettiva di un dato gruppo di simmetria, allora è possibile definire un sistema di imprimitività e quindi tale sistema possiede la proprietà della localizzabilità (4.2).

Un primo possibile tentativo di determinare tale funzione potrebbe essere la determinazione dell'equivalente relativistico di $\tilde{\theta}(r, X)$.

Appendice A

Appendici

A.1 Nozioni generali sulla teoria dei gruppi

In questa appendice si esamineranno alcuni concetti di base sulla teoria dei gruppi. Quindi si definiranno le nozioni di isomorfismo ed omomorfismo, descrivendone le proprietà; quindi si darà la definizione di centro di un gruppo e si definirà il prodotto diretto tra due gruppi. Per le dimostrazioni, laddove non presenti, fare riferimento alla letteratura [16].

Un insieme di elementi abbinato ad un'opportuna legge di composizione (moltiplicazione) è detto gruppo se obbedisce a quattro leggi (assiomi) gruppali, che ne costituiscono così una definizione:

Definizione A.1.

Dato un insieme G di elementi a, b, c, \dots , ed una legge di composizione binaria detta moltiplicazione (o prodotto), esso sarà detto **gruppo** se:

1. dati comunque due elementi a, b del gruppo, anche il loro prodotto ab deve appartenere al gruppo;
2. dati comunque tre elementi a, b, c del gruppo, il prodotto segue la *legge associativa*, cioè $a(bc) = (ab)c$;
3. per ogni elemento a del gruppo, esso contiene un elemento e detto *identità* tale che $ae = ea = a$;
4. dato l'elemento a del gruppo, allora appartiene a G anche l'elemento b tale che $ab = ba = e$. L'elemento b è detto *inverso* di a , ed è indicato da $b = a^{-1}$.

Se a queste si aggiunge anche la *proprietà commutativa*, il gruppo è detto *commutativo* o *abeliano*.

Definizione A.2.

Un gruppo G è detto *abeliano* se $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in G$.

Definizione A.3.

Un gruppo G con n diversi elementi è detto gruppo di *ordine* n . Il gruppo è detto *gruppo finito*.

In un gruppo G ognuna delle equazioni

$$ax = b \tag{A.1}$$

$$ya = b \tag{A.2}$$

con $a, b, x, y \in G$, possiede una ed una sola soluzione x, y rispettivamente. Da ciò segue in particolare l'unicità dell'identità e dell'elemento inverso. Infatti e è la soluzione di $xa = a$, mentre a^{-1} è la soluzione di $xa = e$. Soluzioni delle (A.1) e (A.2) sono rispettivamente $a^{-1}b$ e $b^{-1}a$, e sono le sole possibili. Partendo dall'unicità di identità ed inverso, è naturale introdurre la notazione esponenziale: se $m \in \mathbb{N}$, allora a^m è definito in modo induttivo da $a^{m+1} = a^m a$, mentre gli esponenti negativi da $a^{-m} = (a^{-1})^m$ e la potenza nulla da $a^0 = e$. Se $p, q \in \mathbb{Z}$, allora $a^p a^q = a^{p+q}$ e $(a^p)^q = a^{pq}$.

Un esempio molto importante di gruppo è il **gruppo delle trasformazioni biunivoche** di un insieme. In effetti i gruppi fecero la loro prima comparsa in matematica proprio nella forma di gruppi di trasformazioni, e solo più tardi, come risultato di successive astrazioni, vennero considerati indipendenti dalle trasformazioni.

Un'applicazione uno-a-uno di un insieme arbitrario Γ su se stesso è detta trasformazione di Γ . Se a e b sono due trasformazioni di Γ , allora il loro prodotto $c = ab$ è definito dalla relazione $c(x) = a(b(x))$, per un dato $x \in \Gamma$. È semplice vedere che l'applicazione così definita è ancora una trasformazione di Γ ; l'identità è, poi, definita da $e(x) = x$ e chiaramente per ogni trasformazione a , $ea = ae = a$. La trasformazione inversa a^{-1} è definita come quella che trasporta ogni elemento $a(x)$ dell'insieme Γ nella sua immagine inversa x , così che $a^{-1}a = e$.

Inoltre, date a, b, c trasformazioni di Γ , per $x \in \Gamma$ si ha:

$$(ab)c(x) = (ab)(c(x)) = a(b(c(x)))$$

$$a(bc)(x) = a(bc(x)) = a(b(c(x)))$$

e quindi è valida anche la legge associativa. Così ogni insieme G non vuoto di trasformazioni di Γ che rispetta le leggi poc'anzi descritte (vedi la Definizione A.1) è un gruppo di trasformazioni che agiscono sull'insieme Γ . Un gruppo di trasformazioni che agisce su Γ è detto *transitivo* se per ogni coppia di elementi x, y di Γ esiste una trasformazione $a \in G$ tale che $a(x) = y$. In particolare il gruppo di tutte le trasformazioni di Γ è transitivo. A questo punto è interessante esaminare i vari sottoinsiemi di un gruppo che possono essere definiti. Si parte, innanzitutto, dalla definizione di *sottogruppo*:

Definizione A.4.

Un sottoinsieme H di in un gruppo G è detto *sottogruppo* (o *divisore*) di G se:

1. il prodotto di ogni coppia di elementi in H è ancora in H ;
2. se $a \in H$, allora $a^{-1} \in H$.

Ogni sottogruppo è esso stesso un gruppo poiché i suoi elementi sono contenuti in G e quindi obbediscono alla legge associativa; inoltre $a, a^{-1} \in H$ implica che anche $a \cdot a^{-1} = e$ appartenga ad H . Chiaramente ciascun gruppo è sottogruppo di se stesso, così come l'elemento identità è sottogruppo di ogni gruppo.

La condizione (1) della Definizione A.4 può essere scritta come

$$H^2 \subset H$$

mentre la (2) come

$$H^{-1} \subset H$$

Inoltre deve essere che anche $ab^{-1} \in H$, e ciò può essere scritto come

$$HH^{-1} \subset H$$

Un concetto fondamentale per introdurre e comprendere molte delle definizioni successive è quello di **relazione di equivalenza**:

Definizione A.5.

Una *relazione di equivalenza* è definita in un insieme M quando è possibile dire di due elementi a e b di M se sono equivalenti o menì, ovvero $a \sim b$ oppure $a \approx b$, dove sono soddisfatte le seguenti condizioni

1. Riflessività: $a \sim a$
2. Simmetria: se $a \sim b$, allora $b \sim a$

3. Transitività: se $a \sim b$ e $b \sim c$, allora $a \sim c$

Tutte le volte che una relazione di equivalenza viene definita su un insieme M , allora M è automaticamente partizionato in classi disgiunte di elementi mutualmente equivalenti (*classi di equivalenza*).

Dalla definizione di *relazione di equivalenza* segue quella di *laterale* (classe laterale):

Definizione A.6.

Sia H un sottogruppo di G , con elementi e, h_2, h_3, \dots, h_m ($m \leq n$, dove n è l'ordine di G) e sia $b \in G$, ma $b \notin H$. Allora gli m elementi distinti, $be = b, bh_2, bh_3, \dots, bh_m$ formano un *laterale a sinistra* di H , indicato simbolicamente da bH . Allo stesso modo $b, h_2b, h_3b, \dots, h_mb$ formano un *laterale a destra*, Hb .

L'elemento b è detto *rappresentante* del laterale, che non può essere sottogruppo, non contenendo l'elemento identità. Se, infatti, $bh_i = e$, per un qualsiasi indice i , allora $b = h_i^{-1}$, il che implica $b \in H$, che contraddice con la Definizione A.6. Inoltre due laterali di uno stesso sottogruppo H contengono gli stessi elementi o non hanno alcun elemento in comune.

Da quest'ultima affermazione segue il **Teorema di Lagrange** sull'ordine di un gruppo: l'ordine g di un gruppo G è un multiplo intero dell'ordine di ciascun sottogruppo H .

Ci si può, ora, chiedere quando due partizioni di G , una laterale a destra ed una laterale a sinistra di un certo sottogruppo H di G , coincidono. Si giunge, così, alla definizione di *sottogruppo invariante*:

Definizione A.7.

Un sottogruppo N di un gruppo G è un *sottogruppo invariante* o *normale* di G se $\forall n \in N$ e $\forall a \in G$ si ha che $a^{-1}na \in N$ o, il che è la stessa cosa, se $a^{-1}Na \subset N$, $\forall a \in G$.

In altre parole il fatto che classi di una partizione del gruppo G siano contemporaneamente laterali a destra e a sinistra del sottogruppo N è condizione necessaria e sufficiente affinché N sia sottogruppo invariante.

Dalle due ultime definizioni discende quella di *gruppo fattore* del gruppo G :

Definizione A.8.

Sia N un sottogruppo normale del gruppo G e siano A e B due co-insiemei di N , $A = Na$, $B = Nb$. Il prodotto sarà $AB = NaNb = NNab = Nab$, così che A è ancora un coinsieme di N . In questo modo viene definita sull'insieme dei coinsiemei di N una operazione di moltiplicazione che soddisfa agli assiomi gruppali (vedi Definizione A.1). Il gruppo dei coinsiemei così ottenuto è detto *gruppo fattore* di G del sottogruppo normale N ed è indicato da G/N .

Ogni gruppo G possiede almeno due sottogruppi normali: $\{e\}$, costituito dalla sola identità, ed il sottogruppo G (sottogruppi normali banali). Da ciò segue:

Definizione A.9.

Sia G un gruppo. Se G non possiede alcun sottogruppo normale a parte i due banali, G è detto essere un *gruppo semplice*.

A.1.1 Isomorfismo ed omomorfismo

Come detto all'inizio, la teoria dei gruppi studia un gruppo ponendo la sua attenzione sull'operazione gruppale in esso definita. Questa idea può essere chiarificata in termini della seguente definizione:

Definizione A.10.

Un'applicazione f di un gruppo G su un gruppo G' è detta *isomorfismo* se è uno-a-uno e se conserva l'operazione gruppale, cioè:

$$f(ab) = f(a)f(b) \tag{A.3}$$

per tutti gli $a, b \in G$. Anche l'inverso di f è un isomorfismo.

Due gruppi G e G' sono detti *isomorfi* se esiste un isomorfismo di uno sull'altro.

Un isomorfismo di G su se stesso è detto *automorfismo* di G . Ogni automorfismo è una trasformazione sull'insieme G ; l'insieme di tutti gli automorfismi di un gruppo G è esso stesso un gruppo.

Tra due gruppi G e G' può esistere una relazione più debole rispetto all'isomorfismo, l'*omomorfismo*:

Definizione A.11.

Un'applicazione g di un gruppo G in un gruppo G^* è detta *omomorfismo* se conserva l'operazione gruppale, cioè:

$$g(ab) = g(a)g(b) \tag{A.4}$$

per tutti gli $a, b \in G$. L'insieme $g^{-1}(e^*)$ di tutti gli elementi del gruppo G trasformati nell'identità e^* di G^* dall'omomorfismo g è detto *nucleo* di g .

Isomorfismo ed omomorfismo possono essere messi in connessione grazie al seguente teorema:

Teorema A.1.

Sia g un omomorfismo di un gruppo G su un gruppo G^* e sia $N \subset G$ il nucleo di g . Allora N è un sottogruppo normale di G e G^* è isomorfo con G/N .

Più precisamente, se x^* è un elemento di G^* e se $X = g^{-1}(x^*)$, allora X è un laterale del sottogruppo N , cioè $X \in G/N$. L'applicazione uno-a-uno così ottenuta tra il gruppo G/N e G^* è un isomorfismo.

Tale isomorfismo è detto *isomorfismo naturale* associato con g per distinguerlo da ogni altro possibile isomorfismo esistente tra questi due gruppi.

Dimostrazione. La dimostrazione viene suddivisa in due parti: nella prima si dimostra che N è un sottogruppo normale di G , mentre nella seconda si determina un'applicazione f che lega G/N con G^* e si mostra che essa è un isomorfismo.

N sottogruppo normale di G .

Se $a, b \in N$, allora $g(a) = e^*$, $g(b) = e^*$ e quindi

$$g(ab) = g(a)g(b) = e^*e^* = e^*$$

e quindi $xy \in N$. Allo stesso modo se $n \in N$, così che $g(n) = e^*$, allora $g(x^{-1}) = (g(x))^{-1} = e^{*-1} = e^*$ e $x^{-1} \in N$. Così N è sottogruppo di G .

Siano, ora, $n \in N$, $a \in G$. Allora

$$g(a^{-1}na) = g(a^{-1})g(n)g(a) = (g(a))^{-1}e^*g(a) = e^*$$

e quindi $a^{-1}na \in N$, ovvero N sottogruppo normale di G .

Isomorfismo di G/N su G^* .

Sia a^* un elemento arbitrario di G^* e sia $A = g^{-1}(a^*)$. Se a e a' sono due elementi di A allora

$$g(a'a^{-1}) = g(a')g(a^{-1}) = g(a')(g(a))^{-1} = a^*a^{*-1} = e^*$$

e $a'a^{-1} \in N$, ovvero a e a' appartengono allo stesso laterale di N . D'altra parte, se x appartiene allo stesso laterale di a , cioè se $xa^{-1} \in N$, allora $g(x)a^{*-1} = g(x)g(a^{-1}) = g(xa^{-1}) = e^*$ così che $g(x) = a^*$. Così A è un laterale completo. Quindi l'applicazione che assegna ad ogni $a^* \in G^*$ il laterale $g^{-1}(a^*)$ è un'applicazione uno-a-uno tra i laterali di N ed il gruppo G^* . Questi laterali, però, sono gli elementi del gruppo G/N così che, indicando con f l'applicazione inversa di g , cioè scrivendo $f(A) = a^* \in G^*$ per $A \in G/N$, segue che f è un'applicazione uno-a-uno di G/N su G^* .

Siano, ora, A e B due elementi di G/N e siano $a \in A$, $b \in B$. Siano inoltre $g(a) = a^*$, $g(b) = b^*$. Allora $f(A) = a^*$, $f(B) = b^*$ e $ab \in AB$. Di conseguenza:

$$f(AB) = g(ab) = a^*b^* = f(A)f(B)$$

e quindi f è un isomorfismo.

Si noti che se il nucleo di un omomorfismo g è costituito dalla sola identità, $\{e\}$, allora g è un isomorfismo. In questo caso, infatti, ogni elemento di G^* possiede un'unica immagine inversa in G , poiché ogni laterale contiene un unico elemento.

Se un omomorfismo g mappa G in G^* ma non su G^* , allora $H^* = g(G)$ è un sottogruppo di G^* . Sia, poi, g un omomorfismo di G su G^* . Se H è un sottogruppo di G , allora $g(H)$ è un sottogruppo di G^* . Se H è normale, lo è anche $g(H)$. Infine, sia g un omomorfismo di G in G^* . Se H^* è un sottogruppo di G^* , allora $g^{-1}(H^*)$ è un sottogruppo di G . Se H^* è normale, lo è anche $g^{-1}(H^*)$.

Esiste poi una sorta di legge transitiva tra omomorfismi: se g è un omomorfismo di un gruppo G in un gruppo G^* e g' un omomorfismo di G^* in un terzo gruppo G^{**} , allora l'applicazione $h = g'g$ è un omomorfismo di G in G^{**} .

Grazie alle due definizioni di isomorfismo ed omomorfismo è possibile specificare meglio il concetto di **gruppo di trasformazioni**:

Definizione A.12.

Un gruppo G è detto *gruppo di trasformazioni* che agiscono sull'insieme Γ se ad ogni $x \in G$ corrisponde una trasformazione biunivoca $\tau(x) : \Gamma \rightarrow \Gamma$, tale che $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$.

È ovvio che $G^* = \tau(G)$ è un gruppo di trasformazioni su Γ nel senso delle definizioni precedenti e che τ è un omomorfismo di G su G^* . Se τ è un isomorfismo, allora G è detto essere un gruppo di trasformazioni *effettivo*. In questo caso è possibile identificarlo con G^* , cioè $x = x^*$, così che gli elementi di G possono essere visti come trasformazioni di Γ .

Esempi

1. Siano G il gruppo additivo di tutti i numeri reali e G' il gruppo moltiplicativo di tutti i numeri reali positivi. Allora la mappatura f che associa ad ogni elemento $x \in G$ un elemento $f(x) = e^x \in G'$ è un *isomorfismo* di G su G' .
2. Sia G il gruppo delle matrici $n \times n$ non-singolari ad elementi complessi e sia G^* il gruppo moltiplicativo di tutti i numeri complessi differenti da zero. Se per ogni matrice $s \in G$ scriviamo $g(s) = |s|$, dove $|s|$ indica il determinante della matrice, allora $g(st) = |st| = |s||t|$, così che g è un omomorfismo di G in G^* . In effetti G contiene matrici con determinante arbitrario e diverso da zero, quindi l'omomorfismo è *suriettivo*. Infine,

poiché l'elemento identità di G^* è 1, il nucleo di g sarà formato da tutte le matrici con determinante pari ad 1.

A.1.2 Centro di un gruppo

Presi due elementi a e b in G , si dice che essi commutano se il loro prodotto è indipendente dall'ordine in cui viene eseguito, cioè se $ab = ba$. Da qui la definizione di *centro di un gruppo* G :

Definizione A.13.

Sia z un elemento di G . z è detto essere *centrale* se $\forall x \in G, zx = xz$, o, il che è lo stesso, se $\forall x, x^{-1}zx = z$. L'insieme Z di tutti gli elementi centrali di G è detto *centro* di G ed è esso stesso un gruppo.

Il sottogruppo centrale Z è anche un sottogruppo normale di G , mentre i suoi sottogruppi $H \subset Z$ sono detti *sottogruppi centrali normali*, in quanto ognuno di essi è anch'esso sottogruppo normale di G .

A questo punto è utile stabilire una relazione tra gli elementi di G per stabilire se essi commutano o no. Si nota che il prodotto $ab(ba)^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ è pari all'identità se a e b commutano, altrimenti se non commutano. Il prodotto $aba^{-1}b^{-1}$ viene detto *commutatore*; quindi

$$aba^{-1}b^{-1} = e \tag{A.5}$$

implica che $a, b \in G$ commutano tra loro.

Definizione A.14.

L'insieme Q di tutti gli elementi di un gruppo G della forma $q_1q_2 \dots q_m$, dove ogni fattore q_i è il commutatore di una qualche coppia di elementi di G , è detto *sottogruppo commutatore* di G .

Il sottogruppo commutatore è anche un sottogruppo normale. Innanzitutto si noti che se $Q \ni q = aba^{-1}b^{-1}$, allora

$$c^{-1}qc = (c^{-1}ac)(c^{-1}bc)(c^{-1}a^{-1}c)^{-1}(c^{-1}b^{-1}c)^{-1}$$

è anch'esso un commutatore.

Per $x = q_1 \dots q_m$ si ha che $c^{-1}xc = (c^{-1}q_1c) \dots (c^{-1}q_m c)$, così che $c^{-1}xc \in Q$, $\forall c \in G$ e $\forall x \in Q$, che coincide con la Definizione A.7.

Definizione A.15.

Sia G un gruppo. Si definisce la sequenza di sottogruppi Q_1, \dots, Q_i, \dots , dove Q_1 è il sottogruppo commutatore di G e Q_{i+1} il sottogruppo commutatore di Q_i . Ogni Q_i è sottogruppo normale di G . Se tale sequenza di sottogruppi contiene il sottogruppo banale $\{e\}$, il gruppo G è detto *solubile*.

I concetti esaminati in questa sottosezione, ovvero le definizioni di centro e di sottogruppo commutatore, giocano un ruolo importante nella teoria dei gruppi topologici (vedi sezione 1).

A.1.3 Prodotto diretto tra gruppi

Il concetto di **prodotto diretto tra gruppi** ha un ruolo molto importante nella teoria dei gruppi, poiché permette

1. la costruzione di nuovi gruppi a partire da quelli dati;
2. ridurre lo studio di gruppi relativamente complicati a quello dei loro costituenti più semplici.

Siano N_1 ed N_2 due gruppi con elementi identità e_1, e_2 rispettivamente. Indichiamo con G' l'insieme delle coppie (x_1, x_2) con $x_1 \in N_1, x_2 \in N_2$. In questo insieme si può definire una moltiplicazione: siano $(x_1, x_2) \in G', (y_1, y_2) \in G'$, allora

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

Un prodotto così definito soddisfa a tutti gli assiomi gruppali (Definizione A.1) e il gruppo G' è detto prodotto diretto dei gruppi N_1 ed N_2 , ovvero

$$G' = N_1 \times N_2$$

Definiamo, ora, un'applicazione f_1 di N_1 in G' :

$$f_1(x_1) = (x_1, e_2) \in G'$$

$\forall x_1 \in N_1$. Allo stesso modo un'applicazione f_2 di N_2 in G' ($f_2(x_2) = (e_1, x_2) \in G'$). È evidente che f_i , con $i = 1, 2$, è un isomorfismo di N_i in G' , che il sottogruppo $N'_i = f_i(N_i)$ è un sottogruppo normale in G' e che le seguenti relazioni sono soddisfatte:

$$\begin{aligned} N'_1 N'_2 &= G' \\ N'_1 \cap N'_2 &= \{e'\} \end{aligned}$$

D'altra parte se per due sottogruppi normali N_1, N_2 di un gruppo G sono vere le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} N_1 N_2 &= G \\ N_1 \cap N_2 &= \{e\} \end{aligned}$$

allora G si dice fattorizzabile nel prodotto diretto dei suoi sottogruppi N_1, N_2 . Inoltre ogni elemento dei sottogruppi N_1 commuta con ogni elemento di N_2 ed ogni elemento di G possiede un'unica espressione della forma x_1x_2 , con $x_i \in N_i$. L'applicazione f del gruppo $G' = N_1 \times N_2$ su G definita da $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ è un isomorfismo di G' su G , così come ff_i è la mappatura identità di N_i su se stesso.

Sia, ora, Ω una collezione di sottoinsiemi di un gruppo G e si indichi con $\Delta(\Omega)$ l'intersezione di tutti gli insiemi della collezione Ω . Se tutti gli insiemi di Ω sono sottogruppi di G , lo è anche $\Delta(\Omega)$, se sono tutti sottogruppi normali, anche $\Delta(\Omega)$ è sottogruppo normale di G .

Detto M un arbitrario sottoinsieme di un gruppo G , si indica con Ω la collezione di tutti i sottogruppi di G che contengono M . Il sottogruppo $H(M) = \Delta(\Omega)$ è il più piccolo sottogruppo di G a contenere M , cioè ogni sottogruppo $H \subset G$ che soddisfa alle condizioni $M \subset H$ e $H(M) \subset H$. Il sottogruppo $H(M)$ è costituito da elementi della forma

$$x = x_1x_2 \dots x_r$$

dove x_1, x_2, \dots, x_r è un arbitrario sistema finito di elementi dell'insieme $M \cup M^{-1}$. $H(M)$ è detto il sottogruppo generato da M . Indicando, poi, con Ω' la collezione di tutti i sottogruppi normali di G che contengono M . Come prima, il sottogruppo normale $N(M) = \Delta(\Omega')$ è il più piccolo sottogruppo normale a contenere M e i suoi elementi sono della forma:

$$x = c_1^{-1}x_1c_1c_2^{-1}x_2c_2 \dots c_r^{-1}x_rc_r$$

dove c_1, \dots, c_r è un arbitrario sistema finito di elementi di G , x_1, \dots, x_r un arbitrario sistema finito di elementi dell'insieme $M \cup M'$.

Se H è un sottogruppo ed N un sottogruppo normale di un gruppo G , allora $HN = NH$ e HN è un sottogruppo di G ; se anche H è un sottogruppo normale di G , lo è anche HN . Segue per induzione che per ogni arbitraria collezione infinita N_1, \dots, N_r di sottogruppi normali il prodotto $N_1N_2 \dots N_r$ è ancora un sottogruppo normale, ed è indipendente dall'ordine dei fattori. Sia, ora, Ω una collezione arbitraria di sottogruppi normali di G e si costruisca l'unione M degli insiemi della collezione Ω . Allora $N(M)$, il più piccolo sottogruppo normale di G a contenere tutti i sottogruppi della collezione Ω , si verifica essere l'unione di tutti i sottogruppi normali della forma $N_1 \dots N_r$, dove $N_i \in \Omega$, con $i = 1, \dots, r$. Poiché il prodotto $N_1 \dots N_r$ non dipende dall'ordine dei fattori, possiamo supporre che ogni fattore compare una sola volta. È naturale chiamare il sottogruppo normale $N(M)$ il prodotto dei sottogruppi normali della collezione Ω , e lo si indica con $\Pi(\Omega)$. Se la collezione Ω , costituita dai sottogruppi normali N_1, \dots, N_r , è finita, allora $\Pi(\Omega)$ è proprio il sottogruppo $N_1 \dots N_r$.

A questo punto siamo in grado di introdurre una definizione per il prodotto diretto di una collezione arbitraria di gruppi:

Definizione A.16.

Sia Ω una collezione di gruppi e sia α una funzione che associa ad ogni gruppo $N \in \Omega$ un elemento $\alpha(N)$ del gruppo N stesso. Si indica con G^* la collezione di tutte le funzioni di questo genere ed si introduce in G^* una operazione di moltiplicazione come segue:

se α e β sono due elementi di G^* si definisce il loro prodotto $\gamma = \alpha\beta$ come $\gamma(N) = \alpha(N)\beta(N)$, per ogni $N \in \Omega$. L'insieme G^* con l'operazione di moltiplicazione così definita è un gruppo, con elemento identità $e'(N)$

Il gruppo G^* così ottenuto è detto *prodotto diretto totale* della collezione Ω .

Dal gruppo G^* costruito nella definizione precedente si estrae un sottinsieme G' costituito da tutte le funzioni α che sono in accordo con l'elemento identità e' , eccetto per una qualche collezione finita di N in Ω . G' è un sottogruppo di G^* ed è detto *prodotto diretto* della collezione Ω .

Si può, comunque, dare una definizione differente per il prodotto diretto:

Definizione A.17.

Sia G un gruppo e sia Ω una collezione di sottogruppi normali. Per ogni $N \in \Omega$, sia $\Omega_N = \Omega/N$, $K_N = \Pi(\Omega_N)$ e si indichi con $\hat{\Omega}$ l'insieme di tutti i sottogruppi normali K_N per $N \in \Omega$. Allora si dirà che G è fattorizzato nel prodotto dell'insieme dei sottogruppi Ω se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

$$\Pi(\Omega) = G \tag{A.6}$$

$$\Delta(\Omega) = \{e\} \tag{A.7}$$

Esempio

1. Sia G il gruppo moltiplicativo di tutte le matrici $n \times n$ a valori reali con determinante positivo. Si indicano con N_1 il sottogruppo normale di G costituito da tutte le matrici con determinante pari ad 1 e con N_2 il sottogruppo normale costituito da tutte le matrici della forma λe , dove λ è un reale positivo ed e la matrice identità. Si vede che $N_1 N_2 = G$ e che $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, quindi G fattorizza nel prodotto diretto dei due sottogruppi N_1 ed N_2 .

A.2 Spazio topologico

La nozione di spazio topologico è importante per la definizione di gruppo topologico (vedi Capitolo 1). In questa appendice, quindi, verrà definito il concetto di spazio topologico e si forniranno le definizioni, le nozioni e le proprietà di tali oggetti. Per le dimostrazioni, laddove non presenti, fare riferimento alla letteratura [16].

Definizione A.18.

Un insieme R di elementi arbitrari è detto *spazio topologico* se ad ogni sottinsieme $M \subset R$ è associato un insieme \overline{M} , detto *chiusura* di M , tale da soddisfare le seguenti condizioni:

1. se M contiene solo un elemento a , allora $\overline{M} = M$ o, equivalentemente, $\overline{a} = a$;
2. se M ed N sono due sottinsiemi di R , allora $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$, cioè la chiusura dell'unione è uguale all'unione delle chiusure;
3. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$, ovvero due applicazioni dell'operazione di chiusura portano allo stesso risultato dell'applicazione di un'unica operazione di chiusura.

Gli elementi di uno spazio topologico sono detti i suoi punti. Il punto a è detto *punto d'aderenza* dell'insieme M se $a \in \overline{M}$ e *punto di accumulazione* se $a \in \overline{M/a}$.

Definizione A.19.

Un insieme F in uno spazio topologico R è chiuso se $\overline{F} = F$. Un insieme G è aperto se R/G è chiuso.

Alla luce di questa definizione, a qualsiasi asserzione fatta sugli insiemi chiusi, corrisponde un'asserzione fatta sugli insiemi aperti. Infatti:

1. L'unione di un numero finito di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso:

$$\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F} = E \cup F$$

2. L'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è ancora un insieme aperto.
3. Sia Σ una collezione arbitraria di insiemi chiusi nello spazio R e sia D l'intersezione di tutti gli insiemi appartenenti a Σ . Allora D è anch'esso chiuso.

4. L'unione di una collezione arbitraria di insiemi aperti è aperta.

Si osservi, poi, che, eccetto per il caso banale in cui R è costituito da un solo punto, l'insieme R stesso e l'insieme vuoto sono simultaneamente chiusi ed aperti. Infatti la chiusura di ogni insieme è contenuta in R , in particolare $\overline{R} \subset R$, e quindi R è chiuso. D'altra parte, se R contiene due punti distinti a e b allora l'insieme vuoto è l'intersezione di due insiemi composti da un solo punto costituiti da a e b ed è quindi chiuso anch'esso.

Infine un insieme M in uno spazio R è detto *denso ovunque* se $\overline{M} = R$.

Esempio A.2.1. *Esempi di spazi topologici*

1. Sia R un insieme arbitrario infinito. Si definisce in R un'operazione di chiusura nel modo seguente: se M è un sottoinsieme finito di R , allora $\overline{M} = M$; se M è un sottoinsieme infinito di R , allora $\overline{M} = R$. Con questa operazione di chiusura R soddisfa alla Definizione A.18.
2. Sia R un insieme arbitrario. Definiamo in esso una operazione di chiusura in questo modo: $\overline{M} = M$ per ogni insieme $M \subset R$. Anche in questo caso R è uno spazio topologico. Inoltre ogni sottoinsieme di R è chiuso: uno spazio di tal genere è detto *discreto*.

A.2.1 Gli intorni ed il concetto di chiusura

Per definire uno spazio topologico, quindi, è necessario associare ad ogni sottoinsieme $M \subset R$ la sua chiusura \overline{M} . Non è comunque necessario indicare la chiusura per ogni insieme: è sufficiente definire gli insiemi chiusi e per questi l'operazione di chiusura è unicamente determinata. Infatti, sia M un sottoinsieme arbitrario di R e sia Σ la collezione di tutti i sottoinsiemi chiusi di R che contengono M . Sia, poi, D l'intersezione della collezione Σ . Allora $\overline{M} = D$: in altre parole, \overline{M} è il più piccolo insieme chiuso a contenere M .

A questo punto, per definire gli insiemi chiusi di uno spazio R è sufficiente definire gli insiemi aperti e viceversa: infatti ogni insieme chiuso è il complemento di un certo insieme aperto ed ogni complemento di un insieme aperto è un chiuso. Così per definire uno spazio topologico R è sufficiente definirne i suoi insiemi aperti. Facendo, quindi, uso del fatto che l'unione di una collezione arbitraria di insiemi aperti è un aperto, si arriva ad un'ulteriore semplificazione.

Definizione A.20.

Una collezione Σ di insiemi aperti in uno spazio R è detta *base* per R se ogni insieme aperto di R è l'unione di una qualche collezione di insiemi aperti

appartenenti a Σ . Una base Σ per uno spazio R è anche detta un sistema completo di *intorni* per R ed ogni insieme aperto del sistema Σ è un intorno di ogni punto di quell'insieme aperto.

Se si conosce una base di uno spazio R , allora si conoscono tutti i suoi insiemi aperti e di conseguenza l'operazione di chiusura è unicamente determinata. Quindi per definire uno spazio R è sufficiente darne una base. Dalla Definizione A.20 è chiaro che il concetto di *intorno* non è definito unicamente dall'operazione di chiusura definita in R , ma dipende dalla scelta di una base Σ . Quando nel seguito, però, si farà riferimento ad un intorno, si assumerà di aver selezionato una certa base Σ .

Affinché un sistema di insiemi aperti Σ di uno spazio R sia una base, è necessario e sufficiente che per ogni insieme aperto G e per ogni punto $a \in G$ esista un insieme aperto $\mathcal{N} \in \Sigma$ tale che $a \in \mathcal{N} \subset G$.

Da ciò segue la definizione:

Definizione A.21.

Una collezione Σ' di intorni di un punto a è detta *base in a* , o un *sistema completo di intorni in a* , se per ogni insieme aperto G che contiene a esiste un insieme aperto $\mathcal{N} \in \Sigma'$ tale che $\mathcal{N} \subset G$.

Segue immediatamente che se Σ è una base per tutto lo spazio, allora la collezione di tutti gli insiemi aperti di Σ che contengono a forma una base in a .

Come detto in precedenza, un sistema completo di intorni in uno spazio R determina in maniera unica l'operazione di chiusura. Vediamo come:

- Siano a un punto ed M un insieme in R . Allora $a \in \overline{M}$ quando e solo quando ogni intorno \mathcal{N} di a contiene un punto di M . Per intorno di a si intende un elemento di una qualche base Σ' in a .

Si può ora stabilire, grazie al seguente teorema, quando una collezione di sottoinsiemi Σ di un insieme R è un sistema completo di intorni:

Teorema A.2.

Siano R un insieme e Σ una collezione di sottoinsiemi di R che soddisfano alle seguenti condizioni:

1. per ogni coppia di punti distinti a, b in R , esiste un insieme $\mathcal{N} \in \Sigma$ tale che $a \in \mathcal{N}$, $b \notin \mathcal{N}$;
2. per ogni coppia di insiemi \mathcal{N}, \mathcal{M} della collezione Σ che contiene il punto $a \in R$, esiste un insieme $\mathcal{P} \in \Sigma$ tale che $a \in \mathcal{P} \subset \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$.

Si introduce un'operazione di chiusura in R definendo che $a \in \overline{M}$ quando e solo quando ogni insieme della collezione Σ che contiene a interseca anche M . L'operazione così definita soddisfa alla Definizione A.18, così R è uno spazio topologico. Per lo spazio R così definito Σ è un sistema completo di intorni.

Il Teorema A.2 mostra che per definire uno spazio topologico R è necessario definire un'operazione di chiusura direttamente in R ma sufficiente ad esporre una collezione Σ di sottoinsiemi di R che soddisfano alle condizioni (1) e (2) del teorema.

Si noti che, mentre un sistema definito di intorni in uno spazio topologico R determina lo spazio unicamente, il contrario è falso; un dato spazio R ammette, in generale, molti sistemi differenti di intorni. Così diventa necessario determinare sotto quali condizioni due sistemi di intorni definiti nello stesso insieme R conducono alla stessa operazione di chiusura.

Affinché due sistemi Σ e Σ' di intorni in R siano equivalenti è necessario e sufficiente che per ogni punto a e per ogni suo intorno $\mathcal{N} \in \Sigma$ ci sia un intorno $\mathcal{N}' \in \Sigma'$ tale che $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$, e d'altra parte per ogni intorno $\mathcal{M}' \in \Sigma'$ di a ci sia un intorno $\mathcal{M} \in \Sigma$ tale che $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$.

A questo punto si può formulare una condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme G di uno spazio R sia aperto:

- Un sottoinsieme G di uno spazio R è aperto se e solo se per ogni punto $a \in G$ esiste un intorno \mathcal{N} contenuto in G .

Esempio A.2.2. *Chiusura in uno spazio Euclideo a dimensione n*

Sia R^n uno spazio Euclideo a dimensione n . Ogni punto di R^n è determinato dalle sue n coordinate cartesiane. Si considera una sequenza x_k , $k = 1, 2, \dots$, mentre si indicano con x_k^i , $i = 1, 2, \dots$, le coordinate del punto x_k . La sequenza x_1, x_2, \dots è detta convergere al punto x di coordinate x^i se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = x^i$, per ogni i . Sia M un insieme di punti in R^n . Allora x è detto punto limite di M se esiste in M una sequenza di punti distinti da x che converge ad x . La chiusura \overline{M} di M è allora definita come la collezione di tutti i punti appartenenti ad M insieme a tutti i punti limite di M . La chiusura così definita soddisfa a tutte le richieste della Definizione A.18. In questo modo R^n è uno spazio topologico.

Poiché R^n è uno spazio Euclideo, la distanza tra due punti è un numero ben definito. L'insieme di tutti i punti in R^n a distanza minore di un certo numero positivo r da un punto a fissato è detto *sfera* di centro a e raggio r . È semplice vedere che ogni sfera è un insieme aperto in R^n . Comunque non è difficile verificare che l'insieme di tutte le sfere è una base nello spazio R^n .

Esempio A.2.3. *Chiusura in uno spazio metrico*

Un esempio molto importante è la definizione di chiusura in uno spazio metrico. Vediamo come:

Una collezione R di elementi arbitrari è detta **spazio metrico** se, ad ogni coppia di punti $x, y \in R$ si può associare una *distanza*, ovvero un numero reale $\rho(x, y)$ che soddisfa alle seguenti condizioni:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, dove l'uguaglianza è vera se e solo se $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (*disuguaglianza triangolare*)

Sia M un sottoinsieme arbitrario di uno spazio metrico R e sia a un suo punto. Allora la distanza del punto a dell'insieme M è definita dal limite inferiore $\rho(a, M)$ dell'insieme dei numeri $\rho(a, x)$, $x \in M$, e la chiusura \overline{M} di M è definita come la collezione di tutti i punti a distanza 0 da M . Uno spazio topologico è detto *metrizzabile* se la sua operazione di chiusura può essere definita in termini di una metrica opportunamente scelta.

La sfera di centro a e raggio $\varepsilon > 0$ in uno spazio metrico R è definita come l'insieme di tutti i punti a distanza minore di ε da a . È semplice vedere che ogni sfera è aperta e che la collezione di tutte le sfere è una base per lo spazio topologico R .

Gli spazi Euclidei a dimensione finita dell'esempio precedente sono esempi importanti di spazi metrici, come la loro generalizzazione a dimensione finita, ovvero lo spazio di Hilbert \mathcal{H} . Gli elementi di \mathcal{H} sono le sequenze $x = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ di numeri reali per cui la serie $x_1^2 + \dots + x_n^2 + \dots$ è convergente, e la distanza in \mathcal{H} è definita dall'equazione:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 + \dots}$$

A.2.2 Omeomorfismo ed applicazioni continue

Dal punto di vista topologico, gli spazi che hanno operazioni di chiusura con la stessa struttura sono indistinguibili: essi sono, quindi, detti *omeomorfici*:

Definizione A.22.

Un'applicazione f di uno spazio topologico R su uno spazio topologico R' è detta *omeomorfismo* se è uno-a-uno e se preserva l'operazione di chiusura: $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$, per ogni $M \subset R$. Due spazi topologici R ed R' sono detti omeomorfici se è possibile passare da uno all'altro attraverso un'applicazione omeomorfica f .

Si vede bene che il concetto di omeomorfismo per gli spazi topologici è analogo al concetto di isomorfismo per i gruppi; inoltre si possono caratterizzare le proprietà topologiche proprio come quelle che risultano conservate da tutti gli omeomorfismi. È inoltre chiaro che le proprietà topologiche sono precisamente quelle che possono essere espresse in termini di chiusura. Così la proprietà di un insieme di essere aperto o di essere la chiusura di un qualche insieme è topologica; d'altra parte, la proprietà di essere un intorno non è topologica, poiché un insieme aperto può appartenere ad una base di uno spazio ma non ad un'altra. A causa della non-invarianza della proprietà di essere un intorno, sarà necessario, qualora venisse formulata una definizione in termini di intorni, dimostrarne l'invarianza topologica. La dimostrazione dell'invarianza della definizione, comunque, consiste in ogni caso nel mostrare che sostituire un certo sistema di intorni con un altro equivalente non ha effetto sull'oggetto definito.

Una connessione tra due spazi topologici più debole rispetto all'omeomorfismo è data da una *applicazione continua*, l'analogo dell'omomorfismo per i gruppi.

Definizione A.23.

Un'applicazione g di uno spazio topologico R in uno spazio topologico R' è detta *applicazione continua* se per ogni insieme $M \subset R$ la condizione

$$g(\overline{M}) \subset \overline{g(M)}$$

è soddisfatta.

Data un'applicazione continua g da uno spazio topologico R ad un'altro R' , essa sarà un omeomorfismo se anche g^{-1} risulta un'applicazione continua. Si possono, poi, dare due condizioni, necessarie e sufficienti, per la continuità di un'applicazione g di uno spazio R in uno spazio R' :

1. se F' è un insieme arbitrario chiuso in R' , allora l'immagine inversa $F = g^{-1}(F')$ è anch'esso chiuso;
2. se G' è un insieme arbitrario aperto in R' , allora l'immagine inversa $G = g^{-1}(G')$ è anch'esso aperto.

La continuità di un'applicazione da uno spazio topologico ad un altro può anche essere vista attraverso gli intorni: infatti un'applicazione g di uno spazio R in uno spazio R' è continua quando e solo quando per ogni punto $a \in R$ e per ogni intorno \mathcal{N}' di $a' = g(a)$ esiste un intorno \mathcal{N} di a tale che $g(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}'$. Se la condizione è soddisfatta per ogni punto a , l'applicazione è detta continua in a .

Infine è semplice verificare che se g è un'applicazione continua di uno spazio R in uno spazio R' e se g' è una seconda applicazione continua di uno spazio R' in un terzo R'' , allora $h = g'g$ è un'applicazione continua di R in R'' .

Definizione A.24.

Un'applicazione f di uno spazio topologico R in uno spazio topologico R' è detta *aperta* se ad ogni insieme aperto $U \subset R$ viene associato da f in R' un insieme aperto, ovvero $f(U)$ è aperto. L'applicazione f è aperta se e solo se per ogni punto $a \in R$ e per ognuno dei corrispondenti intorno \mathcal{M} esiste un intorno \mathcal{M}' del punto $f(a) = a'$ tale che $\mathcal{M}' \subset f(\mathcal{M})$.

A.2.3 Definizioni di sottospazio, compattezza e connessione

Come già notato introducendo il concetto di omeomorfismo (Definizione A.22) è possibile realizzare un parallelo tra i concetti e le definizioni legate ai gruppi e quelli degli spazi topologici. Per continuare il parallelo, si introduce ora una definizione analoga a quella di sottogruppo (Definizione A.4):

Definizione A.25.

Sia R uno spazio topologico e sia R^* un sottoinsieme arbitrario di R . Esiste un modo naturale per definire una topologia in R^* , detta *topologia indotta* da quella di R , che rende R^* uno spazio topologico. Quando ciò avviene R^* è detto *sottospazio* di R .

La chiusura \tilde{M} di un insieme M nel sottospazio R^* è definita da: $\tilde{M} = \overline{M} \cap R^*$.

Si possono, ora, stabilire alcune proprietà elementari dei sottospazi:

1. Sia R^* un sottospazio arbitrario di uno spazio R . Se F è un insieme chiuso in R , allora $E = F \cap R^*$ è chiuso in R^* ; d'altra parte, ogni insieme chiuso E in R^* è l'intersezione con R^* di un insieme chiuso F in R opportunamente scelto.
2. Sia R^* un sottospazio arbitrario di uno spazio R . Se G è un insieme aperto in R , allora $H = G \cap R^*$ è aperto in R^* . D'altra parte, ogni insieme aperto H in R^* è l'intersezione tra R^* ed un insieme aperto G in R opportunamente scelto.
3. Sia R uno spazio topologico con base Σ e sia R^* un sottospazio di R . Allora la collezione Σ^* costituita da tutti gli insiemi della forma $U \cap R^*$, $U \in \Sigma$, è base in R^* . È valida anche un'analoga affermazione fatta per una base nel punto a .

4. Sia R^* un sottospazio di uno spazio R . Si associa ad ogni punto $x \in R^*$ il punto $f(x) = x \in R$. Allora f è un'applicazione continua di R^* in R .
5. Sia g un'applicazione continua di uno spazio R in uno spazio R' . Si suppone che $g(R) \subset R^* \subset R'$. Allora g è un'applicazione continua di R nel sottospazio R^* di R' .

Su uno spazio topologico si possono, inoltre, imporre una serie di condizioni: tra queste, alcune delle più importanti sono i così detti **assiomi di separazione**

Definizione A.26.

I seguenti assiomi di separazione sono formulati in ordine crescente:

1. Per ogni coppia di punti distinti a, b in uno spazio R esistono due insiemi aperti disgiunti X, Y tali che $a \in X, b \in Y$. Lo spazio R è detto **spazio di Hausdorff**.
2. Per ogni punto a e per ogni insieme chiuso B che non contiene a nello spazio R esiste gli insiemi aperti disgiunti X e Y tali che $a \in X, B \subset Y$. Uno spazio che soddisfa a questo assioma è detto **regolare**.
3. Per ogni punto a ed ogni insieme chiuso B che non contiene a nello spazio R esiste una funzione continua reale f definita su R tale che $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in R, f(a) = 0$, e tale che $f(x) = 1$, per ogni $x \in B$. Uno spazio R che soddisfa a questo assioma è detto **completamente regolare**.
4. Per ogni coppia di insiemi chiusi disgiunti A, B dello spazio R esistono gli insiemi aperti X, Y tali che $A \subset X, B \subset Y$. Lo spazio R è detto **normale**.

Un'altra importante condizione che si può imporre ad uno spazio topologico è sicuramente la *compattezza*, introdotta per la prima volta da **P. S. Alexandrov**¹, che non fu solo il primo a formulare l'idea, ma ne diede quattro formulazioni mutualmente equivalenti.

Prima di introdurre la definizione di *spazio compatto*, si introduce un'opportuna terminologia, utile a semplificare la comprensione della definizione stessa:

- a. Una collezione Σ di insiemi in uno spazio R è detta **copertura** di un insieme $M \subset R$ se l'unione degli insiemi Σ contiene M .

¹P.S.Alexandrov, *On the concept of space in topology*, 1947, Usephi Mat.Nauk, 2, 1 (17), pag.5

- b. Una collezione Δ di insiemi di uno spazio R possiede un'**intersezione finita** se ogni sotto-collezione finita di Δ possiede un'intersezione non vuota.

Definizione A.27.

Uno spazio topologico R è *compatto* se da ogni copertura di R di insiemi aperti è possibile selezionare una copertura finita. Un sottoinsieme $M \subset R$ è compatto, se è compatto come sottospazio topologico; chiaramente un sottospazio è compatto se e solo se ogni sua copertura di insiemi aperti nello spazio R contiene una copertura finita.

Uno spazio topologico R è *localmente compatto* se ognuno dei suoi punti possiede un intorno la cui chiusura è compatta.

Teorema A.3 (Teorema di Heine-Borel).

Un sottoinsieme M di uno spazio topologico R è compatto se e solo se ogni copertura di M di insiemi aperti ha una sottocopertura finita.

Vediamo, ora, alcune semplici proprietà di uno spazio compatto:

1. Un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto. Un sottoinsieme chiuso di uno spazio localmente compatto è anch'esso localmente compatto, considerato come sottospazio.
2. Un insieme compatto in uno spazio di Hausdorff è chiuso (vedi A.26.1).
3. L'immagine continua di uno spazio compatto è anch'essa compatta.
4. Un'applicazione continua uno-a-uno di uno spazio compatto su uno di Hausdorff ha inversa continua ed è quindi un omeomorfismo.
5. Uno spazio compatto di Hausdorff è normale (vedi A.26.4).
6. Una funzione reale continua su uno spazio compatto è limitata ed assume un valore massimo ed uno minimo.
7. Sia R uno spazio compatto, sia Δ un sistema di insiemi chiusi in R con intersezione F e sia G un insieme aperto contenente F . Allora esiste un numero finito di insiemi del sistema Δ la cui intersezione è contenuta in G . Se, comunque, Δ ha la proprietà che l'intersezione di ogni coppia di insiemi in esso contiene un terzo insieme della stessa collezione, allora deve esserci un insieme di Δ contenuto in G .

Un'altra importante restrizione sugli spazi topologici è sicuramente la **connessione**:

Definizione A.28.

Uno spazio topologico R è detto *connesso* se è impossibile partizionarlo nell'unione di due insiemi disgiunti entrambi chiusi, o aperti, non-vuoti A , B .

Applicando questa definizione ad un sottospazio topologico, si ottiene la definizione di **insieme connesso**: un sottoinsieme M dello spazio topologico R è connesso se è connesso come spazio topologico.

Vediamo, ora, alcuni criteri per determinare la connessione di un insieme:

1. Un sottoinsieme M dello spazio R è connesso se è impossibile partizionarlo nell'unione di due insiemi disgiunti non vuoti A , B tali che l'intersezione $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap M$ è vuota. Questa definizione è equivalente alla Definizione A.28 nel caso in cui $M = R$.
2. Sia a un punto dello spazio topologico R . Allora esiste un sottoinsieme connesso massimo K di R che contiene il punto a . Per K massimo si intende che ogni insieme connesso che contiene a è a sua volta sottoinsieme di K , ovvero K è il più grande insieme connesso a contenere il punto a . L'insieme K è automaticamente chiuso ed è detto la *componente* di a nello spazio R . È chiaro che il componente K di a è simultaneamente componente di ogni altro punto che appartiene a K . Per questa ragione si dice semplicemente che K è componente di R . Se tutti i componenti di R sono insiemi di un punto allora R è detto **totalmente disconnesso**.
3. Se g è un'applicazione continua di uno spazio connesso R su uno spazio R' , allora anche R' è connesso.
4. Ogni componente di uno spazio compatto di Hausdorff è l'intersezione di tutti gli insiemi aperti-chiusi in esso contenuti (per insieme aperto-chiuso si intende un insieme che è simultaneamente aperto e chiuso).
5. Sia R uno spazio di Hausdorff localmente compatto e sia K un componente compatto di R . Allora per ogni insieme aperto G che contiene K esiste un compatto aperto tale che $K \subset P \subset G$.
6. Uno spazio topologico è localmente connesso se per ogni punto a ed ogni intorno \mathcal{N} di a esiste un intorno \mathcal{M} di a tale che $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ e tale che per ogni punto $x \in \mathcal{M}$ esiste in \mathcal{N} un insieme connesso che contiene sia a , sia x . L'immagine di uno spazio localmente connesso sotto l'azione di un'applicazione aperta è esso stesso localmente connesso (vedi pag.188).

Esempi su compattezza e connessione

Vediamo, ora, alcuni esempi di spazi topologici legati ad i concetti di compattezza e connessione:

- Nello spazio euclideo, \mathbb{R}^n . Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se è chiuso e limitato. In particolare, una bolla chiusa in \mathbb{R}^n è compatta.
- Il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ non singolari risulta essere non compatto e non-connesso. È non connesso perché due matrici con determinanti di segno opposto non possono essere collegate da una famiglia continua di matrici non singolari. Se la matrice A_t varia con continuità con t , e così il suo determinante $\det A_t$, e quindi il determinante deve essere zero per un qualche valore di t se $\det A_0 < 0$ e $\det A_1 > 0$. D'altra parte, due matrici i cui determinanti hanno segno identico possono essere unite da un cammino in $GL(n, \mathbb{R})$. Così $GL(n, \mathbb{R})$ ha due componenti connesse, caratterizzate dal segno del determinante.
- Il gruppo $O(n)$ delle matrici ortogonali di rango n è compatto e connesso; è anche suddiviso in due componenti, costituite dalle matrici di determinante 1 e -1 rispettivamente. Le matrici ortogonali a determinante 1 formano un gruppo compatto, connesso indicato da $SO(n)$. Così $SO(n)$ è un componente connesso di $O(n)$ contenente l'elemento identità.
- Il gruppo $U(n)$ delle matrici unitarie complesse di rango n è compatto e connesso. Lo stesso è vero per il sottogruppo $SU(n)$ di $U(n)$ formato dalle matrici di determinante 1. Sia $U(1)$, sia $SO(2)$ sono omeomorfi al cerchio S_1 : ad un punto in S_1 parametrizzato dall'angolo φ , si associa una matrice unitaria 1×1 $e^{i\varphi} \in U(1)$, e la rotazione $R_\varphi \in SO(2)$ intorno ad un angolo φ .
 $SU(2)$ è omeomorfo alla sfera in tre dimensioni S_3 . $SU(2)$ costituito dalle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}$$

dove x, y sono numeri complessi che soddisfano alla relazione $|x|^2 + |y|^2 = 1$. Se si scrive $x = x_1 + ix_2$ e $y = y_1 + iy_2$, la relazione diventa $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1$, che è la definizione dell'equazione della sfera unitaria nello spazio a quattro dimensioni.

A.2.4 Prodotto tra spazi topologici

Il prodotto tra spazi topologici, o più brevemente il prodotto topologico, si può costruire in analogia con il prodotto dei gruppi (Sezione A.1.3); in questo modo siamo in grado di costruire un nuovo spazio topologico a partire da quelli dati, ma anche ridurre lo studio di spazi topologici complessi a quello dei suoi componenti più semplici. L'esempio più noto di prodotto tra spazi topologici è il piano, considerato come l'insieme di tutte le coppie di numeri reali: esso, infatti, inteso in questi termini, risulta essere il prodotto di due assi numerati.

Siano R_1, R_2 due spazi topologici. Si indica con T l'insieme di tutte le coppie (x_1, x_2) , dove $x_1 \in R_1, x_2 \in R_2$. Se $M_1 \subset R_1, M_2 \subset R_2$, si indicherà con (M_1, M_2) il sottoinsieme di T costituito da tutte le coppie (x_1, x_2) con $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$. A partire dalle rispettive basi Σ_1, Σ_2 di R_1 ed R_2 si costruisce la base Σ che definisce una topologia in T .

La base Σ è definita come l'insieme costituito dalle collezioni di tutti gli insiemi (U_1, U_2) , dove $U_1 \in \Sigma_1, U_2 \in \Sigma_2$. Σ soddisfa alle condizioni del *Teorema A.2*, quindi T è uno spazio topologico. Comunque la topologia così definita su T non dipende dalla scelta di Σ_1 e Σ_2 , ma unicamente da dagli spazi R_1 ed R_2 .

Lo spazio T così ottenuto è detto **prodotto topologico**, o il prodotto di R_1 ed R_2 : $T = R_1 \times R_2$. Se G_1 e G_2 sono due spazi aperti in R_1, R_2 , allora (G_1, G_2) è aperto in T , mentre se F_1, F_2 sono chiusi in R_1, R_2 , allora (F_1, F_2) è chiuso in T . Infine, se R_1^*, R_2^* sono sottospazi di R_1, R_2 , allora il loro prodotto $R_1^* \times R_2^*$ è omeomorfo con il sottospazio (R_1^*, R_2^*) di T .

Definizione A.29.

Sia Ω una collezione arbitraria di spazi topologici. Si considerano le funzioni α che associano ad ogni spazio $R \in \Omega$ un punto $\alpha(R) \in R$ e si indica con T la collezione di tutte le funzioni di tal genere. Si introduce la notazione $\alpha(R) = R(\alpha)$, in modo tale che la lettera R è utilizzata non solo per indicare uno spazio topologico, ma anche la *proiezione* di T su tale spazio. Con tale notazione, se $M \subset R$, allora $R^{-1}(M)$ è un sottoinsieme ben definito di T .

Si definisce, ora, una topologia in T definendone una base Σ : l'intorno generale $\mathcal{N} \in \Sigma$ è l'insieme $\mathcal{N} = R_1^{-1}(\mathcal{N}_1) \cap \dots \cap R_k^{-1}(\mathcal{N}_k)$, dove R_1, \dots, R_k è una sotto-collezione arbitraria finita di Ω e, per $i = \dots, k$, \mathcal{N}_i indica un intorno arbitrario nello spazio R_i . Un sistema di intorni Σ così definito soddisfa alle condizioni del *Teorema A.2* ed è quindi un sistema completo di intorni per cui T è uno spazio topologico. Comunque, una topologia così definita non dipende dalla scelta della base nei vari spazi della collezione Ω , ma è unicamente determinata dalla scelta degli spazi stessi. Lo spazio topologico T così

ottenuto è detto **prodotto topologico** o più brevemente **prodotto della collezione** Ω .

Vediamo, ora, alcune proprietà del prodotto topologico²:

1. Il prodotto tra spazi di Hausdorff è di Hausdorff;
2. il prodotto di una collezione arbitraria di spazi compatti è compatto;
3. il prodotto di un numero finito di spazi localmente compatti è localmente compatto
4. sia t un numero arbitrario cardinale infinito e sia Γ un insieme con numero cardinale t . Ad ogni elemento $\gamma \in \Gamma$ si associa una copia I_γ dell'intervallo unitario di numeri reali $0 \leq t_\gamma \leq 1$, e si indica con R_t il prodotto di tutti gli spazi I_γ , $\gamma \in \Gamma$. Lo spazio così definito è determinato, a meno di un omeomorfismo, da t . Un punto $t \in R_t$ può essere visto come una funzione a valori reali che associa ad ogni elemento $\gamma \in \Gamma$ il numero reale $t(\gamma) = t_\gamma$. Poiché ognuno degli spazi I_γ è uno spazio di Hausdorff compatto, segue che R_t è anch'esso compatto e di Hausdorff.
5. Ogni spazio topologico R completamente regolare di peso t è omeomorfo ad un qualche sottospazio dello spazio R (vedi le Definizioni A.26 e A.20).

²I punti 2, pag.194, e 5, pag.194 sono formulati come teoremi (rispettivamente il 5 ed il 6) in [16]

A.3 Gruppi di Lie semi-semplici e gruppi di Lie compatti

In questa appendice si studiano i gruppi di Lie semi-semplici e compatti e le corrispondenti rappresentazioni proiettive [7].

A.3.1 Gli esponenti locali di un gruppo di Lie semi-semplice

Sia a_1, \dots, a_n una base per l'algebra di Lie \mathfrak{g} di un gruppo di Lie G semi-semplice con costanti di struttura c^m_{ik} . Si indica con A_i la matrice di elementi $\alpha^m_k = c^m_{ik}$, ovvero la matrice corrispondente ad a_i nella rappresentazione aggiunta di \mathfrak{g} . L'identità di Jacobi (4.29) può essere scritta come equazione matriciale:

$$A_i A_j - A_j A_i = c^m_{ij} A_m \quad (\text{A.8})$$

dove si utilizza ancora la convenzione della somma. Poiché G è semi-semplice, il tensore simmetrico γ_{ij} definito da

$$\gamma_{ij} = \text{tr}(A_i A_j) = c^m_{ik} c^k_{jm} \quad (\text{A.9})$$

è non-singolare, così che γ_{ij} ed il suo inverso $\gamma^{ij} = \gamma^{ji}$ ($\gamma^{ij} \gamma_{kj} = \delta^i_k$) possono essere utilizzati per alzare ed abbassare gli indici. In particolare:

$$\begin{aligned} c_{lij} &= \gamma_{lm} c^m_{ij} = c^m_{ij} \text{tr}(A_l A_m) = \text{tr}(A_l (A_i A_j - A_j A_i)) = \\ &= \text{tr}(A_l A_i A_j) - \text{tr}(A_l A_j A_i) \end{aligned}$$

Quindi $c_{lij} = -c_{ilj}$ da cui segue che c_{lij} è antisimmetrico nello scambio di due indici. La (A.9) implica poi:

$$\delta^i_j = c^{mi}_k c^k_{jm} = c^i_{km} c_j^{mk} \quad (\text{A.10})$$

Moltiplicando quindi l'equazione $[a_i, a_j] = c^m_{ij} a_m$ per c_l^{ji} e sommando si trova dalla (A.10):

$$a_l = c_l^{ji} [a_i, a_j] \quad (\text{A.11})$$

Sia, ora, Ξ un esponente infinitesimo di \mathfrak{g} . Dalla (4.49)

$$\beta_{mj} c^m_{kl} = \beta_{km} c^m_{lj} + \beta_{lm} c^m_{jk}$$

Ricordando che $\beta_{ij} = \Xi(a_i, a_j)$, si moltiplica per c_i^{lk} , ottenendo:

$$\beta_{ij} = \beta_{km} c^m_{lj} c_i^{lk} + \beta_{lm} c^m_{jk} c_i^{lk} = 2\beta^k_m c^m_{jl} c^l_{ik} = 2 \text{tr}(B A_j A_i)$$

dove B è la matrice degli elementi β^k_m . Poiché $\beta_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} - \beta_{ji})$

$$\beta_{ij} = \text{tr}(B(A_j A_i - A_i A_j)) = c^m_{ji} \lambda_m \quad (\text{A.12})$$

con $\lambda_m = \text{tr}(B A_m)$.

Sia Λ una forma lineare definita su \mathfrak{g} tale che $\Lambda(a_m) = \lambda_m$; allora $\Xi = -d[\Lambda]$, ovvero $\Xi \equiv 0$ e, dal Lemma 4.9, ciò dimostra il seguente teorema:

Teorema A.4.

Ogni sponente locale di un gruppo di Lie semi-semplice è equivalente a 0.

A.3.2 Rappresentazioni proiettive dei gruppi abeliani compatti connessi

Si considera un gruppo di Lie G abeliano compatto connesso di dimensione n ed il suo gruppo coprente universale G^* . Nelle coordinate canoniche, il prodotto su G^* è la somma vettoriale, e si può scegliere un sistema di coordinate su G^* tale che $G = G^*/N$, con N l'insieme costituito da tutti i vettori t con componenti integrali. Si indica con t_j ($1 \leq j \leq n$) il vettore di componenti $\tau^K = \delta_j^K$. Allora per $r = \sum_{k=1}^n \rho^k t_k$ (per ogni $r \in G^*$); $t \in N$ se e solo se $t = \sum_{k=1}^n \nu^k t_k$ (ν^k integrale).

Per ogni rappresentazione proiettiva continua \mathcal{R}_r di G^* si può scegliere un insieme di rappresentanti U_r definiti su tutto il gruppo tali che

$$U_r U_s = e^{i\xi(r,s)} U_{rs}$$

con $r, s \in G^*$ e $\xi(r, s)$ forma bilineare antisimmetrica in r, s . Esiste una rappresentazione proiettiva di G se è possibile associare ad N un raggio unitario così che, in particolare:

$$U_{t_k} = e^{i\theta_k} \cdot 1 \quad (\text{A.13})$$

Quindi, per ogni $r \in G^*$, $U_r = (U_{-t_k} U_r) U_{t_k} = e^{i(\xi(r,t_k) + \xi(r-t_k, t_k))} U_r = e^{2i\xi(r,t_k)} U_r$. Dalla continuità, $\xi(r, y_k) = 0$ per ogni r , poiché $\xi(0, t_k) = 0$. Così, per ogni $s = \sum \sigma^k t_k$:

$$\xi(r, s) = \sum \sigma^k \xi(r, t_k) = 0$$

Gli operatori U_r definiscono quindi una rappresentazione ordinaria di G^* :

$$U_r U_s = U_{rs} \quad (\text{A.14})$$

³Allora $U_r U_{-r} = 1$

e dalla (A.13):

$$U_t = e^{i \sum \nu^k \theta_k} \cdot 1 \tag{A.15}$$

con $t = \sum_k \nu^k t_k \in N$.

Si sceglie ora un nuovo insieme di rappresentanti:

$$U'_r = e^{-i\zeta(r)} U_r$$

con $\zeta(r) = \sum_k \rho^k \theta_k$. Dal fatto che $\Delta_{r,s}[\zeta] = 0$, (A.14) è soddisfatta da U'_r . In più, dalla (A.13), $U'_t = 1$, per ogni $t \in N$. Quindi gli operatori U'_r definiscono una rappresentazione dello stesso G .

Teorema A.5.

Ogni rappresentazione proiettiva continua di un gruppo di Lie G abeliano compatto connesso è indotta da una rappresentazione di G .

A.3.3 Rappresentazioni proiettive dei gruppi di Lie compatti connessi

Sia G un gruppo di Lie compatto connessi di dimensione n . Si distinguono tre casi:

1. G è abeliano;
2. G è semi-semplice, nel qual caso il suo gruppo coprente universale è compatto;
3. G ha un gruppo coprente $G' = G_1 \times G_2$, prodotto diretto di un gruppo G_1 abeliano compatto connesso e di un gruppo G_2 compatto connesso semi-semplice e che è semplicemente connesso. G' stesso è non semplicemente connesso. Il gruppo coprente universale di G (e G') ha la forma $G^* = G_1^* \times G_2$, dove G_1^* è il gruppo coprente universale di G_1 .

Per i Teoremi A.4 e A.5, c'è necessità di esaminare solo il terzo caso.

Determinazione degli esponenti infinitesimi

L'algebra di Lie \mathfrak{g} di G' è la somma diretta di $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$, rispettivamente le algebre di Lie di G_1, G_2 . Come base di \mathfrak{g} si possono scegliere i k vettori a_i che generano \mathfrak{g}_1 e gli l vettori a'_j che generano \mathfrak{g}_2 ($k + l = n$). Allora

$$[a_i, a_j] = 0, \quad [a_i, a'_j] = 0 \tag{A.16a}$$

$$[a'_i, a'_j] = \sum_{m=1}^l c^m_{ij} a'_m \tag{A.16b}$$

Si applicano i risultati della Sezione A.3.1 all'algebra di Lie \mathfrak{g}_2 semi-semplice. Sia Ξ un esponente infinitesimo di \mathfrak{g} . Allora $\Xi(a'_i, a'_j)$ è dato dalla (A.12). Per $\Xi_1 = \Xi + d[\Lambda]$ si ottiene:

$$\Xi_1(a'_i, a'_j) = 0 \quad (\text{A.17a})$$

se Λ è definito da $\Lambda(a'_i) = \lambda_i$, $\Lambda(a_j) = 0$. Inoltre $d\Xi_1(a'_i, a'_j, a_h) = 0$ implica $\Xi_1([a'_i, a'_j], a_h) = 0$ (dalla (A.16a)). Poiché, dalla (A.11), $\Xi_1(a'_m, a_h)$ è una combinazione lineare delle espressioni $\Xi_1([a'_i, a'_j], a_h)$, segue

$$\Xi_1(a'_m, a_h) = 0 \quad (\text{A.17b})$$

Così tutti gli Ξ_1 si annullano per tutte le combinazioni dei vettori di base, con la possibile eccezione di

$$\beta_{ij} = -\beta_{ji} = \Xi_1(a_i, a_j) \quad (\text{A.17c})$$

La relazione (4.47) non restringe in alcun modo β_{ij} .

Rappresentazioni proiettive di G'

Si indicano gli elementi di $G^* = G_1^* \times G_2$ con la coppia (r, r') , dove $r \in G_1^*$, $r' \in G_2$. In questo modo il prodotto su G^* è definito da

$$(r, r') \cdot (s, s') = (rs, r's')$$

Siano e, e' le identità rispettivamente di G_1^*, G_2 . Si applicano i risultati della Sezione A.3.2 a G_1 e G_1^* . Segue che $G' = G^*/N'$, dove N' è un sottogruppo invariante i cui elementi sono (t, e') , con $t = \sum_{j=1}^k \nu^j t_j$ (ν^j integrale).

Un esponente di G^* corrispondente a Ξ_1 (vedi le (A.17)) è

$$\xi((r, r'), (s, s')) = \xi_1(r, s)$$

dove ξ_1 è una forma bilineare anisimmetrica in r, s . Per ogni rappresentazione proiettiva di G^* esiste un insieme ammissibile di operatori $U(r, r')$ definiti su tutto il gruppo tali che

$$U(r, r')U(s, s') = e^{i\xi_1(r, s)} U(rs, r's') \quad (\text{A.18a})$$

con ξ_1 scelto in maniera opportuna.

Si pone $U(r, e') = U_r$, $U(e, r') = V_{r'}$. Dalla (A.18a)

$$U_r V_{r'} = V_{r'} U_r = U(r, r') \quad (\text{A.18b})$$

$$U_r U_s = e^{i\xi_1(r, s)} U_{rs}; \quad V_{r'} V_{s'} = V_{r's'} \quad (\text{A.18c})$$

Si ottiene una rappresentazione proiettiva di G' , se si associa N' con un raggio unitario. La prima equazione nella (A.18c) implica che allora U_r definisce una rappresentazione proiettiva del gruppo abeliano compatto connesso G_1 . Inoltre, come mostrato nella Sezione A.3.2, ξ_1 deve annullarsi, ed è possibile selezionare operatori $U'_r = e^{-i\zeta(r)} U_r$ che definiscono una rappresentazione di G_1 e quindi selezionare operatori $U'(r, r') = e^{-i\zeta(r)} U(r, r')$ che definiscono una rappresentazione di G' . Poiché G' è un gruppo coprente compatto di G , segue

Teorema A.6.

Ogni rappresentazione proiettiva continua di un gruppo di Lie G compatto connesso è indotta da una rappresentazione di un gruppo coprente compatto G' di G .

A.4 Fibrato di Hilbert e *cross-section*

In questa appendice si approfondiranno alcuni aspetti e definizioni lasciate in sospeso nella Sezione 6 (vedi [49]).

Innanzitutto si definisce il concetto di *fibrato*:

1. Per **fibrato di Hilbert su M** o **fibrato di Hilbert con base M** si intende l'associazione $\mathcal{H} : p \rightarrow \mathcal{H}_p$ di uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_p per ogni $p \in M$. L'insieme di tutte le coppie (p, ψ) con $\psi \in \mathcal{H}_p$ sarà indicato da $M\Delta\mathcal{H}$ e detto **spazio del fibrato**.

Segue, quindi, la definizione di *sezione incrociata* (*cross-section*):

2. Per **sezione incrociata** (*cross-section*) di un fibrato si intende un'associazione $\psi : p \rightarrow \psi_p$ di un elemento di \mathcal{H}_p per ogni $p \in M$. Se ψ è una sezione incrociata e (p_0, ϕ_0) un punto di $M\Delta\mathcal{H}$, si può costruire il prodotto scalare $\langle \phi_0 | \psi_{p_0} \rangle$. In questo modo ogni sezione incrociata ψ definisce una funzione a valori complessi f_ψ su $M\Delta\mathcal{H}$.
3. Per **fibrato di Borel di Hilbert** si intende un fibrato di Hilbert con una struttura analitica di Borel in $M\Delta\mathcal{H}$ tale che le seguenti condizioni siano soddisfatte:
 - (a) Sia $\pi(p, \psi) = p$. Allora $E \subseteq M$ è un insieme di Borel se e solo se $\pi^{-1}(E)$ è un insieme di Borel in $M\Delta\mathcal{H}$.
 - (b) Esistono molte *cross-sections* contabili ψ^1, ψ^2, \dots tali che:
 - i. le corrispondenti funzioni a valori complessi su $M\Delta\mathcal{H}$ sono funzioni di Borel;
 - ii. tali funzioni di Borel separano i punti nel senso che non ci sono due punti distinti di $M\Delta\mathcal{H}$ per cui queste funzioni assegnano un'unico ψ^j , a meno che $\phi_1 = \phi_2 = 0$;
 - iii. $p \rightarrow (\psi^i(p), \psi^j(p))$ è una funzione di Borel per tutti gli i, j .
4. Una sezione incrociata è detta **sezione incrociata di Borel** (*Borel cross-section*) se la funzione su $M\Delta\mathcal{H}$ definita dalla sezione incrociata è una funzione di Borel. Tutte le sezioni incrociate di Borel formano uno spazio lineare sotto le ovvie operazioni. Sia ora μ una misura su M . La sezione incrociata $p \rightarrow \varphi_p$ è detta *sommabile al quadrato* rispetto a μ se

$$\int_M \langle \varphi_p | \varphi_p \rangle \mu(p) < \infty$$

Lo spazio $\mathcal{L}^2(M, \mu, \mathcal{H})$ di tutte le classi di equivalenza delle sezioni incrociate sommabili al quadrato, dove due sezioni incrociate φ, φ' sono nella stessa classe di equivalenza se $\varphi_p = \varphi'_p$ per ogni $p \in M$, forma uno spazio di Hilbert separabile con prodotto interno definito da:

$$\langle \varphi | \theta \rangle = \int_M \langle \varphi_p | \theta_p \rangle d\mu(p)$$

È detto integrale diretto di \mathcal{H}_p rispetto a μ ed è indicato da $\int_M \mathcal{H}_p d\mu(p)$.

A.4.1 Interpretazione fisica della *cross-section*

Ogni esperimento è, per sua natura, un evento spaziotemporale. Ad ogni misura eseguita nel punto p_0 dello spaziotempo si associa un operatore autoaggiunto Q_{p_0} che agisce nello spazio di Hilbert \mathcal{H}_{p_0} , assegnando l'usuale interpretazione data dal teorema spettrale a Q_{p_0} . Quindi, per semplicità, assumendo che Q_{p_0} possiede uno spettro discreto, se $\phi_0 \in \mathcal{H}_{p_0}$ e $\lambda_0 = \lambda_0(p_0)$ sono rispettivamente l'autovettore ed il corrispondente autovalore di Q_{p_0} , allora la seguente proposizione è vera:

- Se l'esperimento corrispondente a Q_p è stato realizzato nel punto p_0 dello spazio tempo su un sistema di stati descritto dalla sezione incrociata ψ , allora la probabilità che il valore misurato sia $\lambda_0(p_0)$ e che il sistema si trovi nello stato descritto da ϕ tale che $\phi(p_0) = \phi_0$ dopo l'esperimento è data dal quadrato del valore assoluto della funzione di Borel $|f_\psi(p_0, \phi_0)|^2 = |\langle \phi_0 | \psi_{p_0} \rangle|^2$ indotta dalla sezione incrociata ψ .

Bibliografia

- [1] Abraham Cohen, *An Introduction to the Lie Theory of One-Parameter Groups*⁴, D.C.Health Co., Publishers, 1911;
- [2] John von Neumann, *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren*, *Mathematische Annalen*, vol.**104** (1931), pag.570;
- [3] Herman Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Londra, 1931;
- [4] Eugene P.Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, *Annals of Mathematics* vol.**40**, n.1 (1939), pag.149;
- [5] Claude Chevalley, *Theory of Lie groups*, Princeton University Press, 1946;
- [6] Kenkichi Iwasawa, *On some types of topological groups*, *Annals of Mathematics*, vol.**50** (1949), pag.507;
- [7] Valentine Bargmann, *On Unitary Continuous Ray Representations*, *Annals of Mathematics*, vol.**59** (1954), pag.1;
- [8] John von Neumann, *Mathematical principles of quantum mechanics*, University Press, Princeton, 1955;
- [9] Eugene P.Wigner, *Group Theory and Its Application to the Quantum Theory of Atomic Spectra*, Academic Press Inc., New York, 1959;
- [10] Volker Heine, *Group Theory in Quantum Mechanics*, Pergamon Press, 1960;
- [11] Eugene P.Wigner, *Phenomenological distinction between unitary and anti-unitary symmetry operators*, *Journal of Mathematical Physics*, vol.**1**, n.5 (1960), 414;
- [12] Ulf Uhlhorn, *Representation of symmetry transformations in quantum mechanics*, *Arkiv för Fysik*, **23**, n.30 (1963), pag.307
- [13] Valentine Bargmann, *Note of Wigner's Theorem on Symmetry Operations*, *Journal of Mathematical Physics*, vol.**5**, n.7 (1964), pag.862;

⁴Il testo è liberamente scaricabile da internet dall'Internet Archive in formato .pdf e dalla Cornell Library Historical Mathematics Monographs in versione .gif (un file immagine per ciascuna pagina)

- [14] Morton Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1964;
- [15] A.C.Hurley, *Ray representations of point groups and the irreducible representations of space groups and double space groups*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol.**260** (1966), pag.1;
- [16] Lev Semenovich Pontryagin, *Topological groups*, seconda edizione, Gordon and Breach Science Publisher Inc., 1966;
- [17] C.R.Putnam, *Commutation propertie of Hilbert space Operators*, Springer-Verlag, 1967;
- [18] Josef Maria Jauch, *Foundations of quantum mechanics*, Addison-Wesley, 1968;
- [19] D.J.Simms, *Lie groups and quantum mechanics*, Lecture notes in mathematics n.52, Springer-Verlag, 1968;
- [20] G.C.Hegerfeldt, K.Kraus, E.P.Wigner, *Proof of the fermion superselection rule without the assumption of time-reversal invariance*, Journal of Mathematical Physics, vol.**9**, n.12 (1968), pag.2029;
- [21] D.J.Simms, *Lie groups and Lie algebras*, note per la *Summer School on Group representations and Quantum Mechanics*, Dublino, 1969;
- [22] R.H.Brennich, *The irreducible ray representations of the full inhomogeneous Galilei group*, Annals of Institute Henri Poincaré, vol.**XIII**, n.2 (1970), pag.137;
- [23] Frederick W.Byron jr, Robert W.Fuller *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, vol.2, Addison-Wesley Publishing Company, 1970;
- [24] L.Fonda, G.C.Ghirardi, *Symmetry Principles in Quantum Physics*, Marcel Dekker, inc., 1970;
- [25] V.S.Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, vol.2, Van Nostrand Reinhold Company, 1970;
- [26] S.L.Altmann, *Double groups and projective representations I. General teory*, Molecular Physics, vol.**38**, n.2 (1979), pag.489;
- [27] S.L.Altmann, F.Palacio, *Double groups and projective representations II. Clebsch-Gordan coefficients*, Molecular Physics, vol.**38**, n.2 (1979), pag.513;
- [28] Robert D.Richtmyer *Principles of Advanced Mathematical Physics*, vol.2, Springer-Verlag Inc., 1981;
- [29] J.F.Cornwell, *Group Theory in Physics*, vol.1, Academic Press, 1984;
- [30] V.S.Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Springer-Verlag, 1984;

- [31] Wu-Ki Tung, *Group theory in physics*, World Scientific Publishing, 1985;
- [32] Maelvin Hauser, Jacob T.Schwartz, *Lie Groups; Lie algebras*, Science Publisher, Inc., 1986;
- [33] Chris J.Isham, *Lectures on Groups and Vector Spaces For Physicists*, World Scientific Publishing, 1989;
- [34] Gregory Karpilovsky, *Group Representations*, vol.2, North-Holland, 1993;
- [35] A.L.Onishchik, E.B.Vinberg, *Foundations of Lie theory*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, vol.20, Springer-Verlag, 1993;
- [36] Gregory Karpilovsky, *Group Representations*, vol.3, North-Holland, 1994;
- [37] S.K.Bose, *Representations of the (2+1)-dimensional Galilean group*, Journal of Mathematical Physics **36** (1995), pag.875;
- [38] S.K.Bose, *The Galilean Group in 2 + 1 Space-Times and its Central Extension*, Communications in Mathematical Physics, n.169 (1995), pag.385;
- [39] Yves Brihaye, Stefan Giller, Cezary Gonera, Piotr Kosiński *Remarks on central extension of the Galileo group in 2 + 1 dimensions*, arXiv:q-alg/9508020 (1995);
- [40] H.-D.Doebner, H.-J.Mann, *Ray representations of $N(\leq 2) + 1$ -dimensional Galilean group*, Journal of Mathematical Physics, **36** (1995), pag.3210;
- [41] Steven Weinberg, *The quantum theory of fields*, vol.1, Cambridge Press University, 1995;
- [42] D.R.Grigore, *The projective unitary irreducible representations of the Galilei group in 1 + 2 dimensions*, Journal of Mathematical Physics **37** (1996), pag.460;
- [43] Jürg Rätz, *On Wigner's theorem: Remarks, complements, comments, and corollaries*, Aequationes Mathematicae n.52 (1996), pag.1;
- [44] G.Cassinelli, E.De Vito, P.J.Lahti, A.Levrero, *Symmetry groups in quantum mechanics and the theorem of Wigner on the symmetry transformations*, Reviews in Mathematical Physics, vol.9, n.8 (1997), pag.921;
- [45] M.Toller, *Introduzione a gruppi ed algebre in meccanica quantistica*, 1999;
- [46] Jaroslaw Wawrzycki, *Generally covariant quantum mechanics*, arXiv:math-ph/0307060 (2003);
- [47] Jaroslaw Wawrzycki, *Equality of inertial and gravitational masses for quantum particle*, arXiv:gr-qc/0207115 (2003);
- [48] Jaroslaw Wawrzycki, *Noncommutative spacetime and quantum mechanics*, arXiv:quant-ph/0404028 (2004);

- [49] Jaroslaw Wawrzycki, *A generalization of the Bargmann's theory of ray representations*, Communications in Mathematical Physics, n.250 (2004), pag.215;
- [50] **Problem Set 10:** Wigner's symmetry representation theorem, dal corso *Relativistic quantum field theory I* del MIT.