Notizie pi greche

Curiosità sul numero più famoso della matematica

Gianluigi Filippelli

AUTOPRODOTTO

DROPSEAOFULAULA.BLOGSPOT.COM

March 2023

Sommario

1. Storia di Pi

1.1 Dalle origini a oggi

Come sapete il π è definito come il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro. Questo numero, che è trascendentale, visto che è impossibile ottenere contemporaneamente circonferenza e diametro interi, era, a quanto pare, noto fin dall'antichità. Ci sono, infatti, alcuni egittologi che ritengono che π o forse $\tau = 2\pi$ era loro noto, visto che il rapporto tra il perimetro e l'altezza della piramide di Giza, costruita tra il 2589 e 2566 a.C., è di 6.2857.
Non ci sono prove esplicite del fatto che, all'epoca, la matematica egiziana fosse venuta a conoscenza di un numero come il π, però, tra i 600 e i 1000 anni più tardi su una tavoletta babilonese viene geometricamente stabilito il primo valore di π: $25/8 = 3.1250$. Da documenti redatti più o meno nello stesso arco di tempo si deduce poi che anche gli egiziani erano arrivati al calcolo del valore di π, ottenendo $(16/9)^2 \approx 3.1605$.
La matematica indiana, invece, sembra leggermente in ritardo, visto che nel 600 a.C. nelle *Shulba Sutras*, si calcola per π un valore di $(9785/5568)^2 \simeq 3.088$, che verrà successivamente aggiornato nel 150 a.C. come $\sqrt{10} \simeq 3.1622$, che è un valore molto più vicino a quello calcolato dagli egiziani.
Un valore molto vicino a quello oggi noto è invece quello calcolato da **Rabbi Nehemiah** nel suo trattato geometrico *Mishnat ha-Middot*, dove, correggendo il valore presente in un passo della *Bibbia* che indicava in 3 il valore del π, trova $3 + 1/7 \simeq 3.14286$.
L'approssimazione però più stupefacente non solo per la precisione ma soprattutto per il metodo è quella proposta da **Archimede**, il matematico italo-greco che ideò il metodo dei poligoni per calcolare quella che per un millennio divenne nota semplicemente come la *costante di Archimede*. Il nostro, semplicemente, calcolò il perimetro dei poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza data, ottenendo così una stima inferiore e una superiore al valore della costante:

$$223/71 < \pi < 22/7$$

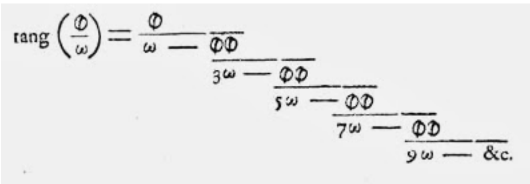
ovvero

$$3.1408 < \pi < 3.1429$$

E’ evidente che questo metodo di calcolo è estremamente moderno e soprattutto suggerisce come Archimede fosse ben conscio della natura trascendentale della costante, che poteva essere conosciuta solo attraverso delle approssimazioni.
Oggi il pi greco è noto fino a 5 trilioni di cifre (se non ce la fate ad andare così lontano, c’è il primo milione sul sito del Pi Day) e se provate a digitare il simbolo di π sulle moderne calcolatrici scientifiche, il valore che esse vi forniscono è, per le prime cifre decimali, 3.14159265...[1]

1.2 Irrazionale e trascendente

Una volta introdotto nella matematica il π, uno dei problemi a margine per la determinazione delle sue cifre fu, evidentemente, comprenderne la sua natura, ovvero che genere di numero esso sia. La classificazione è abbastanza nota e semplice per tutti: avendo come base di partenza i numeri naturali (gli interi positivi e negativi), si possono definire i numeri razionali, ovvero quelli generati dal rapporto di due numeri naturali. Ciascun numero razionale può quindi essere espresso nella forma $\frac{a}{b}$, con a, b, naturali e b non nullo.
Il primo a dimostrare la natura irrazionale di π fu **Johann Heinrich Lambert** nel 1761 in *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques*:



$$\mathrm{tang}\left(\frac{\Phi}{\omega}\right) = \cfrac{\Phi}{\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{3\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{5\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{7\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{9\omega - \&c.}}}}}$$

che in termini moderni può essere scritta come segue:

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}} \tag{1.1}$$

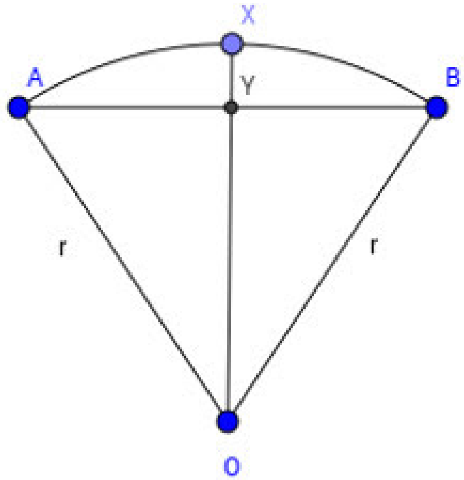
Lambert dimostrò che se x è non nullo e razionale, allora questa espressione deve essere irrazionale. E poiché $\tan(\pi/4) = 1$, segue che π è irrazionale.
Una semplificazione di questa dimostrazione è stata proposta da **Laczkovich** nel 1997, mentre **Li Zhou**, nel 2009, ne ha proposto una variazione che fa uso del calcolo integrale.
In particolare la seconda dimostrazione dell’irrazionalità di $\tan x$ e quindi di π prende ispirazione dalla dimostrazione del 1873 che **Charles Hermite** lasciò in due lettere a **Paul Gordan** e **Carl Borchardt**. Una semplificazione di questa dimostrazione, che utilizza la tecnica della riduzione per assurdo, è stata proposta da **Mary Cartwright**, così come divulgato da **Harold Jeffreys** in *Scientific interference* del 1973.
Un’ultima dimostrazione dell’irrazionalità di π, che sta tra l’altro in una paginetta, è data da **Ivan Niven** nel 1946. La trascendenza di π, invece, così come quella di e, è una diretta conseguenza del *teorema di Lindemann-Weierstrass* che afferma che, dati $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ numeri algebrici linearmente indipendenti nel campo dei numeri razionali, allora $e^{\alpha_1}, \cdots, e^{\alpha_n}$ sono algebricamente indipendenti sui razionali, dove per numero algebrico si intende un numero che è soluzione di una equazione polinomiale a coefficienti razionali.

[1] Dal Carnevale della Matematica 59

Nel 1882 **Lindemann**, utilizzando proprio questo teorema, dimostrò che e è trascendentale, e quindi, utilizzando l'*identità di Eulero*, si può dimostrare anche la trascendenza di π.[2]

1.3 La matematica asiatica

Il pi greco, definito come il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro, è un numero trascendentale. Il calcolo di questo rapporto ha impegnato centinaia di migliaia di matematici nel corso dei millenni, ma il primo approccio scientifico al problema viene tradizionalmente assegnato ad **Archimede**, che utilizzando i metodi di esaustione e compressione fornì un intervallo per il valore del π.
Il matematico cinese **Liu Hui**, vissuto tra il 220 e il 280, all'interno del suo più noto trattato, lo *Jiuzhang suanshu*, che si può rendere come *I nove capitoli dell'arte matematica*, propone un metodo che è una variazione di quello di Archimede con l'ausilio del *teorema di gougu*, o *teorema dell'ipotenusa*, ovvero il *teorema di Pitagora*.



L'idea di Liu Hui è quella di calcolare il rapporto tra circonferenza e diametro per iterazione, calcolando il perimetro di figure inscritte in una circonferenza di raggio r con un numero di lati sempre maggiore. Supponiamo che il segmento $AB = p_{n-1}$ nella figura sia il lato di un poligono regolare con un numero di lati $N = 3 \cdot 2^{n-1}$. AY sarà la metà di AB, e quindi, utilizzando il teorema di Pitagora

$$OY = \sqrt{r^2 - \left(\frac{p_{n-1}}{2}\right)^2} \tag{1.2}$$

da cui per sottrazione la lunghezza di XY. Questo vuol dire che, utilizzando ancora una volta Pitagora, si riesce a ricavare la lunghezza AX, che è la lunghezza del lato del poligono regolare con numero di lati $N = 3 \cdot 2^n$:

$$p_n = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - p_{n-1}^2}\right)} \tag{1.3}$$

Ponendo $r = 1$, il valore approssimato del pi greco sarà dalla metà di p_n. Aumentando n, e quindi il numero dei lati della figura, aumenta la precisione del calcolo. Liu Hui ottenne come

[2]Dal Carnevale della Matematica 71

approssimazione 3.14159, che corrisponde a un n di 3072.
Restando alla matematica asiatica, sono da segnalare le approssimazioni di **Zu Chongzhi**, anch'egli matematico e astronomo cinese, vissuto tra il 429 e il 500, che calcolò π inscrivendo un poligono di 12288 lati in una circonferenza. Fornì un valore compreso tra 3.1415926 e 3.1415927 e due approssimazioni razionali, $355/113$ e $22/7$. Il matematico giapponese **Arima Yoriyuki** ha, invece, fornito nel 1776 un'approssimazione razionale corretta fino alla 29.ma cifra[3]

$$\pi \approx \frac{428224593349304}{136308121570117}$$

1.4 Ludolph Van Ceulen

All'interno della nostra storia ha un ruolo importante **Ludolph Van Ceulen**, matematico tedesco nato il 28 gennatio 1748 a Hildesheim e successivamente emigrato inisieme con la famiglia a Delft, nei Paesi Bassi, molto probabilmente per sfuggire alla lunga mano dell'inquisizione spagnola che era giunta fino in Germania per affrontare i protestanti.
La passione per la matematica lo portò ad affrontare le classiche sfide con altri matematici, come quella lanciata da **William Goudaan** di Haarlem su un problema geometrico o quella, fondamentale per la carriera di Van Ceulen, con **Simon van der Eycke**, che nel 1584 propose una dimostrazione sulla quadratura del cerchio. In due articoli del 1585 e del 1586 Van Ceulen mostrò l'errore nel lavoro di van der Eycke e probabilmente furono proprio questi lavori che lo spinsero ad avvicinarsi al lavoro di Archimede, aiutato dal borgomastro di Delft, **Jan Cornets de Groot**, che provvide a tradurgli i vari trattati.
Il primo importante risultato nella ricerca delle cifre del π venne pubblicato nel trattato *Vanden circkel*[4] del 1596 dove vennero presentate 20 cifre decimali corrette per π, dove venne utilizzato un poligono di $15 \cdot 2^{31}$ lati. Successivamente, utilizzando un poligono di 2^{62} lati, arrivò a 35 cifre decimali: questo risultato venne pubblicato postumo, prima in un articolo uscito nel 1615 su iniziativa di **Adriana Simondochter**, la sua vedova, dove vennero pubblicate 33 delle 35 cifre, quindi nel 1621 su *Cyclometricus*, trattato del suo allievo **Willebrord Snell**, che peraltro tradusse in latino alcuni dei lacori di Van Ceulen per permetterne una maggiore diffusione.
Il suo metodo, variazione di quello di Archimede, conduce alla formula che potremmo definire *formula di Van Ceulen*

$$\pi = n \sin \frac{180^\circ}{n} \tag{1.4}$$

Per ricavarla, prendiamo una circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$, così che la circonferenza stessa risulta pari a π. Dato un qualunque poligono regolare inscritto all'interno della circonferenza, il suo perimetro sarà dato dal prodotto degli n lati per la lunghezza del lato l. Prendiamo un lato qualunque: essendo una corda in una circonferenza, esso risulta perpendicolare con il raggio passante per il punto medio, generando così due triangoli rettangoli con angolo di vertice O centro del cerchio pari a θ. Utilizzando il teorema dei seni, è semplice vedere che

$$\sin \theta = 2\frac{l}{2} = l \tag{1.5}$$

e quindi il perimetro del poligono sarà dato da

[3] Dal Carnevale della Matematica 95
[4] *Sul cerchio*

$n \sin\theta$

All'interno del poligono possono costruire $2n$ triangoli rettangoli, quindi dividendo l'angolo giro per il numero dei lati ottengo il valore di $\theta = \frac{360}{2n} = \frac{180}{n}$ e da qui la formula di Van Ceulen, il cui risultato sarà tanto più vicino al valore di π all'aumentare del numero dei lati del poligono. Infine come Archimede, anche Van Ceulen produsse un limite massimo,

$$3.14159265358979323846264338327950289,$$

e un limite minimo,

$$3.14159265358979323846264338327950288,$$

scolpiti sulla sua pietra tombale in quel di Leida. In suo onore il π in Germania è anche noto come *numero ludolphino*.[5]

1.5 Inizia l'era delle serie

Come abbiamo visto nella sezione precedente, **Ludolph van Ceulen** nel 1596 arrivò prima a calcolare 20 cifre decimali, quindi 35 utilizzando il metodo dei poligoni, che venne utilizzato da altri matematici prima di decadere: ad esempio **Willebrord Snellius** nel 1621 calcolò 34 cifre, mentre l'astronomo austriaco **Christoph Grienberger** nel 1630 raggiunse la cifra record di 38 cifre utilizzando un poligono di 1040 lati: questo risultato costituisce il più accurato mai raggiunto utilizzando il metodo dei poligoni.
A soppiantare tale metodo arrivarono le serie infinite: il primo a utilizzarle in Europa fu il matematico francese **François Viète** nel 1593

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots \tag{1.6}$$

cui seguì nel 1655 **John Wallis**

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \tag{1.7}$$

La matematica europea, però, era arrivata a questo metodo solo dopo la matematica indiana, per quanto indipendentemente. In India, infatti, si trovano testimonianze di primi approcci di questo genere tra il 1400 e il 1500. La prima serie infinita utilizzata per calcolare π si trova, infatti, sulle pagine del *Tantrasamgraha* (l'etteralmente "*compilazione di sistemi*") dell'astronomo indiano **Nilakantha Somayaji**, all'incirca 1500-1501. La serie, presentata senza alcuna dimostrazione (successivamente pubblicata nello *Yuktibhs*, 1530 circa), era attribuita da Nilakantha al matematico **Madhava of Sangamagrama**, vissuto tra il 1350 e il 1425 circa. A quanto pare Madhava scoprì diverse serie infinite, incluse molte che contengono il seno, il coseno e la tangente. Il matematico indiano utilizzò tali serie per arrivare fino a 11 cifre intorno al 1400, valore che venne migliorato intorno al 1430 dal matematico persiano **Jamshd al-Ksh** grazie all'impiego del metodo dei poligoni.[6]

[5] Dal Carnevale della Matematica 95
[6] Dal Carnevale della Matematica 107

1.6 L'era della trigonometria

Era il 1621 quando venne dato alle stampe il *Cyclometricus* di **Willebrord Snellius**, allievo di **Ludolph van Ceulen**. Snellius dimostrò che il perimetro del poligono inscritto converge al valore della circonferenza due volte più velocemente rispetto al poligono circoscritto. Da buon allievo di van Ceulen, Snellius riuscì a ottenere 7 cifre decimali per il π utilzzando un poligono di 96 lati. Il suo miglior risultato, invece, furono 35 cifre decimali, che migliorava le 32 del suo maestro.
Il miglioramento successivo è datato 1630 ad opera di **Christoph Grienberger**, ultimo matematico a valutare π con il metodo dei poligoni, mentre il primo cambio di metodo di successo arrivò grazie al matematico e astronomo britannico **Abraham Sharp** che determinò 72 cifre decimali di π, di cui 71 corrette, utilizzando una serie di arcotangenti. Pochi anni dopo **John Machin** migliorò ulteriormente il risultato di Sharp con la formula che porta il suo nome e che gli permise di raggiungere il ragguardevole risultato di 100 cifre decimali!

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \tag{1.8}$$

L'approccio di Machin si rivelò vincente, tanto che il barone sloveno **Jurij Vega** migliorò in due occasioni la formula di cui sopra ottenendo un maggior numero di cifre decimali di π, la prima volta nel 1789 con una formula simile a quella di Euler

$$\frac{\pi}{4} = 5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79} \tag{1.9}$$

quindi nel 1794 con una formula tipo Hutton

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} \tag{1.10}$$

L'era dell'arcotangente è proseguita con **William Rutherford**

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{70} + \arctan\frac{1}{99} \tag{1.11}$$

quindi il tedesco **Zacharias Dase**

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} \tag{1.12}$$

Infine arriva il britannico **William Shanks** che spingendo al massimo le potenzialità della formula di Machin riuscì ad ottenere 707 cifre decimali, di cui però solo 527 risultarono corrette dopo il controllo di Ferguson nel 1946. Qui, però, siamo nell'era del calcolo meccanico, prologo a quella dei computer.[7]

[7] Dal Carnevale della Matematica 117

2. L'identità di Eulero

Il numero di Archimede è presente in moltissime equazioni, alcune delle quali trovano applicazioni pratiche, ma la regina delle equazioni in cui è presente è la meglio nota identità di Eulero:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

L'equazione unisce insieme l'unità dei numeri naturali, 1, l'unità dei numeri immaginari, i, il numero di Nepero, e, e il *pi greco*. Ed è proprio a questa equazione che dedico questo capitolo, iniziando con il numero di Nepero[1].

2.1 John Napier: dai logaritmi a Bernoulli

Nepero, latinizzazione di **John Napier**, matematico scozzese, oltre che nella matematica, aveva un forte interesse anche nelle arti mistiche. Scrisse, infatti, *A plaine discovery of the whole revelation of St John*, dove prevedeva che la fine del mondo sarebbe avvenuta tra il 1688 e il 1700. Qualcuno ritiene che praticasse sia l'alchimia sia la negromanzia. Inoltre, stando a quanto racconta il suo discendente **Mark Napier**, possedeva un ragno nero, che portava sempre con se custodito all'interno di una scatoletta, e un gallo nero, che era in realtà il suo famiglio, il suo assistente magico.
In realtà utilizzava il gallo in una maniera in un certo senso matematica. Quando subiva una ruberia, Napier chiudeva in una stanza i sospettati uno a uno insieme con il gallo e, millantando i poteri magici dell'animale, invitava ciascun indagato ad accarezzare il famiglio, suggerendo che avrebbe infallibilmente identificato il colpevole. In realtà le penne del gallo erano ricoperte di fuliggine. Questo voleva dire che l'unico che non avrebbe toccato il gallo, ovvero il colpevole per paura di essere scoperto, sarebbe stato anche l'unico con le mani pulite!
L'interesse principale di Nepero risiedeva, però, nel cercare un metodo che permettesse di realizzare il più velocemente possibile i calcoli aritmetici più complessi. A questo scopo Napier portò a compimento due piccole invenzioni: i bastoncini o ossi di Nepero, che permettevano di svolgere le moltiplicazioni tra numeri a molte cifre, e i logaritmi. Questi ultimi furono presentati per la

[1] Dal Carnevale della Matematica 138

prima volta nel *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* del 1614 e portò una vera e propria rivoluzione nel mondo della matematica. In un lavoro successivo datato 1618, sempre sui logaritmi, troviamo il primo riferimento alla costante che oggi porta il suo nome, e, sebbene la sua effettiva scoperta venga accreditata al matematico svizzero **Jacob Bernoulli**, che nel 1683 determinò il risultato del seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

2.2 Immaginare numeri

Il secondo ingrediente dell'identità di Eulero è l'unità immaginaria, i. La sua storia è, invece, legata alla ricerca delle soluzioni delle equazioni polinomiali.
Uno dei problemi che più interessò i matematici fu, infatti, quello di trovare le soluzioni alle equazioni polinomiali. Tra i matematici più attivi in questo genere di problemi c'è stato l'italiano **Gerolamo Cardano**. Figlio illegittimo e giocatore d'azzardo, ebbe una vita decisamente ricca e caotica: si ammalò di peste da bambino, ed ebbe alcune difficoltà di impotenza, fino a che non ne guarì. Questo gli permise di sposare **Lucia Bandarini**, da cui ebbe tre figli, il maggiore dei quali, **Giovanni Battista**, venne arrestato e condannato a morte per uxoricidio. Nell'ultima parte della sua vita venne arrestato dall'inquisizione con l'accusa di eresia, probabilmente dovuta al fatto che (forse) realizzò l'oroscopo di Gesù.
La sua più grande opera matematica fu l'*Ars Magna*, trattato del 1545 dove fornì i risultati relativi alle equazioni di terzo e quarto grado. In particolare la formula di Cardano per le equazioni di terzo grado aveva un piccolo inconveniente: con alcune particolari equazioni dava origine a radici quadrate di numeri negativi.
La cosa, a Cardano, non diede particolare fastidio, ma il matematico non approfondì la faccenda più di tanto. La questione, però, venne ripresa nel 1572 da un altro matematico italiano, **Rafael Bombelli**. Nella sua opera principale, *L'algebra*, rimasta incompiuta a causa della sua morte prematura (rimasero in forma di manoscritto gli ultimi due dei cinque volumi previsti), Bombelli mostrò come le radici dei numeri negativi, dette *quantità silvestri*, potevano essere utilizzate proficuamente per determinare la soluzione di un'equazione.
Bombelli diede, dunque, dignità di numero alle radici dei numeri negativi, rinominati successivamente *numeri immaginari* dal francese **René Descartes**. Da lì in poi trovarono applicazione in varie equazioni della matematica e della fisica, mostrando anche di avere una ricaduta nella vita di tutti i giorni.
Ciò che, però, ci interessa è il loro legame con la trigonometria, perché è da lì che arriveremo, finalmente, all'identità di Eulero.

2.3 Una questione angolare

La trigonometria è quella branca della matematica che studia i triangoli. I suoi strumenti fondamentali sono le funzioni trigonometriche, attraverso le quali si riesce a descrivere il legame tra gli angoli e i lati di un triangolo.
Trattare con queste funzioni non è esattamente semplice o naturale, però, sotto opportune condizioni, è possibile fornire una rappresentazione di tali funzioni molto più trattabile: lo sviluppo in serie. Questa è una tecnica sviluppata dai matematici, in particolare l'inglese **Brook Taylor** che si occupò di tale questione in alcuni scritti risalenti al 1715, ma anche altri prima di lui, per determinare un'espressione polinomiale per funzioni non polinomiali, come i logaritmi e, appunto, le funzioni trigonometriche.

In particolare lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni seno e coseno è dato dalle espressioni (di seguito $n!1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Anche per la funzione esponenziale è possibile calcolare uno sviluppo in serie di Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

A osservarle con attenzione le tre serie sembrano avere non poco in comune. In particolare sembra che debba esistere un modo per ottenere la serie esponenziale a partire da una combinazione lineare delle serie di seno e coseno. E in effetti, se al posto di x utilizziamo iz, dove i è l'unità immaginaria, allora scopriamo che

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

A questo punto è quasi fatta: scegliamo un valore particolare per la variabile, ovvero $z = \pi$:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0$$

questo perché $\cos \pi = -1$ e $\sin \pi = 0$. A questo punto è facile ricavare dall'ultima espressione l'identità di Eulero:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

3. Calcolare Pi

3.1 La sequenza di Fibonacci

A quanto pare anche **Leonardo Fibonacci** si cimentò, nel 1220, con il calcolo del *pi greco*, ottenendo come risultato 3.141818[1]. Non sono riuscito a scovare il metodo usato dal matematico italiano, ma esistono un paio formule basate sui numeri della successione di Fibonacci che permettono di calcolare le cifre di π.
Partiamo dalla seguente formula di **Leonhard Euler** (vi ricordo che il matematico svizzero propose nella sua carriera diverse formule che permettevano di calcolare *pi greco*) scritta intorno al 1738:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$$

$$= \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{21}$$

$$= \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{34} + \arctan\frac{1}{55}$$

Quello che si può notare è che ciascun numero nelle frazioni all'interno delle arcotangenti appartiene alla serie di Fibonacci. A questo punto, detto F_n l'n-simo numero di Fibonacci, otteniamo la seguente formula per il calcolo (esatto) di π:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{F_{2n+1}}$$

[1] Dal Carnevale della Matematica 148

La seconda formula, invece, usa il concetto di limite (che possiamo spiegare come "quello che fa una data fuzione quando si avvicina a un punto in cui non dovrebbe essere possibile calcolarne il valore"):

$$\pi = \lim_{m \to \infty} \sqrt{\frac{6 \log(F_1 \cdots F_m)}{\log lcm(F_1, \ldots, F_m)}}$$

dove *lcm* è *least common multiple*, ovvero il *minimo comune multiplo*.
In effetti dando una scorsa all'articolo di **Yuri Matiyasevich** e **Richard Guy**[2], risulta abbastanza evidente come questa formula sia figlia di quella precedente.

3.1.1 Le arcotangenti di Fibonacci

La questione delle arcotangenti dei numeri di Fibonacci venne posta per la prima volta nel 1936 in uno dei problemi pubblicati sul numero 9 del volume 43 di *The American Mathematical Monthly*. La richiesta era di mostrare che $\arctan 1$ poteva essere scritta come somma di arcotangenti in cui gli argomenti sono numeri della serie di Fibonacci.
La soluzione arriva due anni dopo, sempre su *The American Mathematical Monthly* ad opera di **M.A. Heaslet**. Sulle arcotangenti dei reciproci dei numeri di Fibonacci, invece, arriva la dimostrazione da parte di **L. Carlitz** della formula

$$\arctan \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi F_{n+1} + F_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{F_{2n+1}}$$

3.1.2 I numeri di Lucas

Edouard Lucas, matematico francese della seconda metà del XIX secolo, è stato il primo a usare il nome di sequenza di Fibonacci per la serie di numeri che risolve il famoso problema dei conigli proposto nel *Practica Geometriae*. Oltre a studiare la sequenza, ne ha anche proposto una sua variazione: la sequenza di Lucas si basa sulla stessa regola di quella di Fibonacci (un qualunque numero è la somma dei due numeri precedenti), ma non inizia con 1 e 1, bensì con 2 e 1.
Non è il caso di parlare approfonditamente dei numeri di Lucas, ma basti sapere che questi sono legati da una serie di relazioni. Alcune relazioni "avanzate" coinvolgono le arcotangenti, e quindi potete immaginare dove sto andando a parare: è possibile utilizzare i numeri di Lucas per trovare una successione con cui calcolare *pi greco*:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{3} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \arctan \frac{1}{L_{2k}}$$

Altre formule che permettono di calcolare il valore di *pi greco* usando i numeri di Fibonacci sono state proposte sul *Fibonacci Quarterly* da **Guy Guillot** nel 1977:

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2F_{2n+1}}{F_{2n} \cdot F_{2n+2}}$$

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \arccos \frac{F_{2n}F_{2n+2}}{F_{2n} \cdot F_{2n+2} + 2}$$

[2]Matiyasevich, Y. V., Guy, R. K. (1986). A new formula for π. The American mathematical monthly, 93(8), 631-635. doi:10.1080/00029890.1986.11971904

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{2F_{2n+1}}{F_{2n} \cdot F_{2n+2} + 2}$$

L'ultima formula che coinvolge i numeri di Fibonacci è di **Dario Castellanos**, e troviamo anche il numero aureo, φ:

$$\frac{\pi}{4} = \sqrt{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n F_{2n+1}}{(2n+1)\varphi^{2(2n+1)}}$$

3.2 Dai Chudnovsky ai fattoriali

Calcolare le cifre del π è, in un certo senso, una sottile arte matematica, che combina la tecnica degli algoritmi iterativi con la più sottile tecnica delle serie convergenti. Ad esempio il raggiungimento dell'ultimo record di 5 trilioni di cifre è stato possibile grazie alla *formula dei* ***Chudnovsky***

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}} \tag{3.1}$$

Oltre questa formula, **Alexander J. Yee** e **Shigeru Kondo**, i detentori del record, hanno anche utilizzato come controllo la *formula di* ***Plouffe***, nota anche come *formula di* ***BaileyBorweinPlouffe***

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \tag{3.2}$$

e la *formula di* ***Bellard***

$$\begin{aligned} \pi \;=\; & \frac{1}{2^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{10n}} \left(-\frac{2^5}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{2^8}{10n+1} \right. \\ & \left. - \frac{2^6}{10n+3} - \frac{2^2}{10n+5} - \frac{2^2}{10n+7} + \frac{1}{10n+9} \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Interessante notare come tutte queste serie si basino, in un modo o nell'altro, sulle serie sviluppate a partire dal 1914 dal matematico indiano **Srinivasa Ramanujan**. Questa è solo una delle più note e delle più rapide:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k!)(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}} \tag{3.4}$$

Esistono, poi, un altro paio di serie interessanti su cui spendere un paio di parole. Innanzitutto c'è la curiosa *serie di* ***Gregory***, che ha lo spiacevole difetto di sbagliare poche cifre sparse in tutto lo sviluppo, ad esempio 6.a, 11.a, 12.a, 23.a, ... Tutte le altre, invece, sono corrette!

$$\pi = 4 \sum_{k=1}^{500000} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \tag{3.5}$$

Invece **Stanley Rabinowitz** e **Stan Wagon** propongono la seguente serie

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i!}{(2i+1)!!} \tag{3.6}$$

dove $k!!$ è il prodotto di tutti i numeri dispari fino a k.[3]

3.3 Da Machin a Eulero

Il pi greco è definito come il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo raggio, però può essere calcolato/definito anche grazie a una serie di formule, che sono cresciute negli anni con l'aumentare dell'interesse nei suoi confronti. Nella sezione precedente abbiamo visto un folto gruppo di formule:

- formula dei Chudnovsky
- formula BBP
- formula di Bellard
- formula di Rabinowitz e Wagon
- una formula di Ramanujan

Sono solo una piccola parte (considerate che uno dei maggiori contributori è stato Ramanujan), e dunque in questa sezione proseguiamo l'elenco. Si parte da una delle più semplici, oltre che una delle più esatte, la *formula di **Machin***:

$$\frac{1}{4}\pi = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} \tag{3.7}$$

Machin trovò, comunque, altre tre formule di questo genere, dove cambiano semplicemente i numeri all'interno delle funzioni.
Un'altra formula per il calcolo del π è la *formula di Leibniz e Gregory*:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \tag{3.8}$$

La serie, in effetti, è nota anche come semplicemente *serie di Leibniz*. Solo successivamente si associò a essa anche il lavoro di **James Gregory**, che la riscoprì e la pubblicò nel 1668: il suo primo scopritore, però, fu, nel XIV secolo, il matematico e astronomo indiano **Madhava di Sangamagrama**.
La formula può essere opportunamente modificata per accelerare la sua convergenza inserendo al suo interno la funzione $\zeta(z)$, ovvero la *zeta di Riemann*:

$$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k-1}{4^k}\zeta(k+1) \tag{3.9}$$

Sempre restando sulle serie storiche, ecco quella di **Abarham Sharp**, del 1717 circa:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k 3^{1/2-k}}{2k+1} \tag{3.10}$$

Anche Eulero si interessò al π: è infatti grazie al suo lavoro se oggi chiamiamo questo numero trascendentale pi greco, ed è ovviamente sua la famosa *identità di Eulero*, che unisce le due costanti

[3] Dal Carnevale della Matematica 59

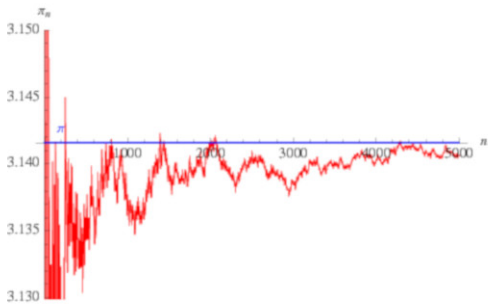
più importanti della matematica, oltre a rappresentare anche una possibile sintesi della matematica stessa:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{3.11}$$

La serie particolare, scoperta da Eulero, per il calcolo del π è, però, una produttoria, che lega il numero archimedeo con gli ennesimi numeri primi p_n:

$$\pi = \frac{2}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi p_n\right)}{p_n}\right)} \tag{3.12}$$

che può anche essere rappresentata graficamente[4]:



3.4 Wallis e Cavalieri

Tra le molte formule per calcolare il pi greco ha un posto particolare il *prodotto di Wallis*, scoperto più o meno per caso dal matematico **John Wallis** mentre stava cercando di calcolare l'area di un cerchio.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot 43 \cdot \frac{4}{5} \cdots = \frac{\pi}{2} \tag{3.13}$$

Wallis presentò la sua formula nel suo libro più famoso, *Arithmetica infinitorum*[5] del 1665, fondamentale per esempio nella formazione di **Isaac Newton**, che in un certo senso ne prese il posto come punto di riferimento per la matematica britannica.
La storia della formula, però, inizia in Italia nel 1632 con la pubblicazione de *Lo Specchio Ustorio, overo, Trattato delle settioni coniche* dove il matematico **Bonaventura Cavalieri** calcola l'area sotto "parabole" del tipo $y = xn$. Cavalieri procedette calcolando l'area compresa tra gli assi e le curve del tipo

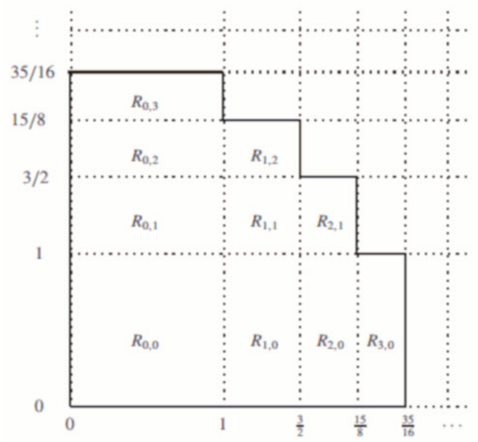
$$y = \left(1-x^2\right)^0,\ y = \left(1-x^2\right)^1\ y = \left(1-x^2\right)^2\ y = \left(1-x^2\right)^3,\ \cdots \tag{3.14}$$

ottenendo rispettivamente

[4] Dal Carnevale della Matematica 71
[5] *L'aritmetica degli infiniti*

$$
\begin{gathered}
x, \\
x-\tfrac{1}{3}x^3, \\
x-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5, \\
x-\tfrac{3}{3}x^3+\tfrac{3}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7, \\
x-\tfrac{4}{3}x^3+\tfrac{6}{5}x^5-\tfrac{4}{7}x^7+\tfrac{1}{9}x^9, \\
\dots
\end{gathered}
$$

Poiché l'equazione del cerchio di raggio 1 è $y=\left(1-x^2\right)^{1/2}$, il problema si riduce a determinare l'espressione corrispondente all'esponente $\frac{1}{2}$ compresa tra x e $x-\frac{1}{3}x^3$.
Non riuscendo a determinare tale espressione, Wallis portò a termine una serie di calcoli numerici che lo condussero alla fine alla formula che porta il suo nome.



Un dimostrazione più o meno semplice della formula passa attraverso la definizione di tre nuove serie numeriche e il calcolo dell'area di una serie di rettangoli nel piano cartesiano: geometricamente parlando dimostrare la formula è come calcolare il limite di due archi di circonferenza, uno superiore e uno inferiore, che si avvicinano al contorno dei rettangoli, fino ad coincidere con esso al raggiungimento del valore di $\frac{\pi}{2}$.
Una dimostrazione più rigorosa, invece, che prende la strada della dimostrazione della formula di Cavalieri, passa attraverso l'integrale del seno

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \tag{3.15}$$

E' poi possibile, utilizzando opportunamente la *funzione eta di* ***Dirichlet***, determinare un legame tra la zeta di Riemann e la formula di Wallis, il che è anche abbastanza scontato visto che la zeta di Riemann è legata proprio al pi greco[6].

3.5 La formula BBP

A partire dalla 762.ma cifra decimale di π inizia una sequenza di sei 9 consecutivi detta *punto di Feynman*. Il nome deriva da un aneddoto non verificato con protagonista **Richard Feynman**, che durante una conferenza disse che avrebbe voluto imparare le cifre decimali di π proprio fino a quel

[6]Dal Carnevale della Matematica 83

punto.
All'interno della sequenza delle cifre decimali del pi greco sono presenti altri gruppi come questo, come un secondo insieme di sei 9 consecutivi in posizione 193.034 o un gruppo di sei 8 in posizione 222.299.
L'interesse verso queste sequenze all'interno della sequenza generale è dovuto alla congettura che π sia un *numero normale*, ovvero che le cifre che lo compongono siano distribuite con la stessa frequenza (in effetti si ritiene che π possa addirittura essere assolutamente normale, ovvero normale per ogni base numerica).
Fino a ora non è stata trovata nessuna reale traccia di anormalità per il pi greco, ma non è stata prodotta nemmeno alcuna dimostrazione formale per la sua normalità. Questa ricerca, che potrebbe invece essere più fruttuosa in termini di risultato finale rispetto, ad esempio, alla dimostrazione della *congettura di Collatz*, si intrecca con la *formula di Borwein, Bailey e Plouffe*, meglio nota come la *formula BBP*:

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right) \tag{3.16}$$

Uno dei vantaggi più interessanti di questa formula è che permette di calcolare le cifre dello sviluppo del pi greco a partire da un qualunque punto. Questa proprietà, però, funziona solo in base 16 (o eventualmente in una base potenza di 2) ma non con la base 10.
L'idea di partenza di **David Bailey**, **Peter Borwein** e **Simon Plouffe** è quella di determinare un algoritmo in grado di calcolare l'n-sima cifra di un numero trascendentale in basi differenti. I numeri cui sono interessati sono della forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(k)}{b^{ck} q(k)} \tag{3.17}$$

dove $p(k)$ e $q(k)$ sono polinomi, mentre b è la base nella quale calcolare la cifra e c un intero positivo.
Utilizzando formule tipo la BBP (quindi della forma generale poc'anzi fornita) Borwein insieme con **Richard Crandall** è riuscito a fornire i criteri per stabilire la normalità in una data base dei numeri della forma:

$$\frac{1}{b^{c^k} c^k}$$

In particolare b e c devono essere primi fra loro.
Tra gli altri risultati hanno anche determinato la sequenza[7]

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k} \tag{3.18}$$

3.6 Il problema di Basilea

Nel 1644 il matematico **Pietro Mengoli** propose il così detto *problema di Basilea*, che chiedeva la soluzione esatta della somma dei reciproci al quadrato di tutti i numeri naturali:

[7] Dal Carnevale della Matematica 95

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \tag{3.19}$$

La soluzione al problema arrivò nel 1735 grazie a **Leonard Euler**, all'epoca all'inizio della sua brillante carriera di risolutore di problemi. Il matematico svizzero dimostrò che la somma esatta della serie è $\pi^2/6$.
La dimostrazione di Eulero, pubblicata nella sua versione definitiva nel 1741, risulta particolarmente interessante, visto il punto di partenza: supporre di poter applicare le regole dei polinomi finiti anche a quelli infiniti.
Partiamo con lo sviluppo in serie di Taylor per la funzione seno in 0:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Dividendo per x entrambi i termini, si ottiene:

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

le cui radici sono π, $-\pi$, 2π -2π, 3π, -3π, $\cdots$. Cambiando in questo modo la variabile, ovvero $z = x^2$, il polinomio di cui sopra diventa:

$$\frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots$$

le cui radici sono π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2$, $\cdots$.
Ora, dato un polinomio $a_n x^n + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + bx + 1$, per le formule di Viète, abbiamo che la somma dei reciproci delle sue radici ha come risultato $-b$. Applicando questo risultato dei polinomi finiti al polinomio infinito in z di cui sopra, si ottiene:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \cdots$$

da cui:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

I più attenti di voi avranno sicuramente notato come la *serie di Mengoli* sia legata alla zeta di Riemann, definita come

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{3.20}$$

E' semplice, quindi, vedere che $\zeta(2)$ coincide con la *serie di Mengoli*: calcolare una o l'altra diventa, quindi, assolutamente equivalente. Tra l'altro nel 1982 apparve sulla rivista *Eureka* una dimostrazione rigorosa del risultato di Eulero a firma di **John Scholes** sebbene sembra che tale dimostrazione circolasse già a fine anni sessanta tra i corridoi di Cambridge.[8]

[8] Dal Carnevale della Matematica 107

3.7 Le formule di Ramanujan

Nel 1910 il più noto matematico indiano, **Srinivasa Ramanujan**, trovò una serie di formule rapidamente convergenti per il calcolo delle cifre decimali del π. Una di queste è già comparsa in una delle precedenti *notizie pi greche*. La ripropongo anche qui per rinfrescare la memoria:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k!)(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

Un'ampia collezione di formule e metodi per determinare le cifre decimali del π dovute a Ramanujan sono presenti in un suo articolo del 1914, *Modular equations and approximations to* π, che sono anche la base di partenza per le così dette formule di Ramanujan-Sato, sviluppate a partire dal lavoro del 2002 di **Takeshi Sato** proprio sull'articolo di Ramanujan. Di questo genere di formule ne esistono 11 tipi o livelli, ma tutte sono riducibili alla seguente struttura:

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} s(k)\frac{Ak+B}{C^k}$$

dove $s(k)$ è una sequenza di interi che può essere espressa usando i coefficienti binomiali (che per semplificare possiamo dire sono i numeri di cui è fatto il triangolo di Tartaglia, o di Pascal, dipende se siete italiani o francesi!), mentre A, B, C sono forme modulari, ovvero funzioni analitiche a più dimensioni generalmente a valori complessi... e più semplice di così non riesco a spiegarle. O forse potrei proporre come esempio di forma modulare la serie di Eisenstein (che peraltro è stata oggetto di studio proprio di Ramanujan):

$$E_k(\Lambda) = \sum_{0\neq\lambda\in\Lambda} \lambda^{-k}$$

dove k è un intero maggiore di 2, condizione necessaria per la convergenza della serie, mentre λ è un vettore dello spazio Λ.
L'aspetto interessante del coinvolgimento delle forme modulari è che le serie di Ramanujan-Sato note fino al 2012 coinvolgevano numeri reali, ma la prima con numeri complessi venne scoperta proprio quell'anno dal trio **Heng Huat Chan, James Wan, Wadim Zudilin**, che hanno contribuito abbondantemente allo sviluppo di questa particolare tipologia di successioni, che peraltro sono alla base degli algoritmi utilizzati oggi per determinare sempre più cifre del π.[9]

[9] Dal Carnevale della matematica n.127

4. Misurare Pi

4.1 La quadratura del cerchio

Le tecniche di costruzione geometriche degli antichi greci erano dette "*con riga e compasso*". In questo modo è possibile costruire una gran quantità di poligoni regolari, per esempio, ma esistono tre problemi che risultano impossibili a meno di non utilizzare tecniche differenti: la *trisecazione di un angolo*, la *duplicazione del cubo*, la *quadratura del cerchio*.
In particolare per la quadratura, è semplice vedere come, detto r il raggio del cerchio, il lato del quadrato con la stessa area sarà

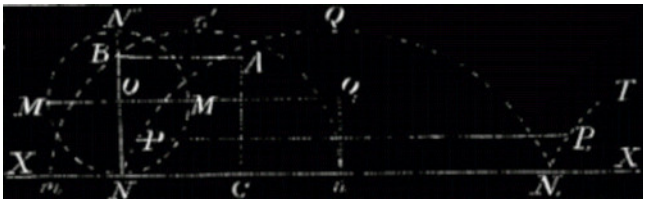
$$l = \sqrt{\pi} r \tag{4.1}$$

Poiché pi greco è un numero trascendentale, la formula qui sopra è la più semplice rappresentazione dell'impossibilità della quadratura del cerchio utilizzando riga e compasso, con i quali è possibile trattare numeri razionali e irrazionali, come per esempio $\sqrt{2}$ (in questo caso basta semplicemente disegnare un quadrato di lato 1).
Utilizzando questi due strumenti è possibile ottenere una costruzione approssimata e, quindi, un corrispondente approssimato valore per il pi greco. In era moderna si contano approssimazioni di **C.D. Olds** (1963), **Martin Gardner** (1966), **Benjamin Bold** (1982), tutte alla fine variazioni sulla costruzione geometrica di **Srinivasa Ramanujan** del 1913 che approssimò pi greco con la frazione

$$\frac{355}{113} = 3.1415929203539823008\ldots$$

corretto fino alla sesta cifra decimale.
Sempre Ramanujan ottenne l'anno dopo un'approssimazione ancora più accurata (fino all'ottava cifra decimale), sempre utilizzando riga e compasso:

$$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = 3.1415926525826461252\ldots$$



Se però al compasso e alla riga aggiungiamo anche un po' di meccanica riusciamo a ottenere una interessante quadratura del cerchio (con conseguente misura del pi greco!). Prendiamo una circonferenza di raggio r e facciamola rotolare con velocità costante lungo una sua retta tangente. Il punto di tangenza N descriverà una curva detta *cicloide*.
E' possibile, poi, costruire una seconda cicloide utilizzando la proiezione del punto M (l'estremo del diametro perpendicolare al raggio cui appartiene N) sulla retta tangente. L'intersezione B del diametro NN' con questa seconda cicloide ci fornirà un segmento di lato NB la cui lunghezza sarà pari a $\sqrt{\pi}r$, ovvero il lato del quadrato con area identica al cerchio di partenza. Dividendo, quindi, il segmento così costruito per il raggio del cerchio di partenza è possibile, alla fine determinare il valore del pi greco.
E come suggerito questa costruzione non è semplicemente geometrica, ma possiamo anche farla realmente, magari con un piccolo disco di ottone come suggerisce **August Zielinski**, il propositore del metodo di quadratura or ora sommariamente descritto.
Ovviamente in questo caso la precisione del valore di pi greco determinato dipende dalla precisione del metodo di misurazione[1].

4.2 Con bicchiere e righello

Se non siamo interessati all'accuratezza, misurare pi greco è qualcosa che possiamo fare tranquillamente in casa con un metro a nastro e un bicchiere o un piatto. Su *Math is fun* utilizzano un piatto, ottenendo come valore $\pi = 3.1538$.

A casa, invece, ho provato a misurare un bicchiere con uno di quei piccoli metri che danno all'Ikea ottenendo un valore di $\pi = 3.1389$ (circonferenza di $21.6\,cm$, diametro di $7.2\,cm$).
Una misura di questo genere indubbiamente non permette di ottenere un valore esatto, ma può essere interessante per comprendere il concetto di errore sperimentale e apprezzare la grande precisione delle tecniche numeriche sviluppate per il calcolo delle cifre.

[1] Dal Carnevale della Matematica 83

Per poter calcolare l'errore da attribuire al valore di π determinato sperimentalmente, bisogna partire dalla sua formula di definizione

$$\pi = \frac{C}{d} \tag{4.2}$$

Il modo più semplice per determinare l'errore è ricordarsi che, nel caso di prodotti e divisioni, l'errore relativo (rapporto tra errore assoluto e misura) sulla grandezza che ci interessa è la somma degli errori relativi delle quantità misurate:

$$\frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta d}{d} \tag{4.3}$$

Quindi facendo un paio di calcoli si ottiene:

$$\Delta\pi = \frac{\Delta C}{d} + \frac{\Delta d}{d^2}C \tag{4.4}$$

Valutando l'errore sperimentale dell'ordine dei $2\,mm$ sia nel caso della misura della circonferenza (prevenendo così una non perfetta posizione del metro) sia nel caso della misura del diametro ($1\,mm$ per la lettura dello "0" e $1\,mm$ per la lettura della lunghezza) si ottiene, per *Math is Fun*, un valore pari a:

$$\pi = (3.15 \pm 0.03)$$

mentre per il sottoscritto[2]

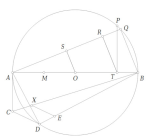
$$\pi = (3.14 \pm 0.11)$$

4.3 Le approssimazioni di Ramanujan

Nella ricerca delle migliori approssimazioni di pi greco, **Srinivasa Ramanujan** scoprì due interessanti approssimazioni che possono essere determinate con due particolari costruzioni geometriche.
La prima approssimazione

$$\frac{355}{113}\left(1 - \frac{0.0003}{3533}\right) = 3.1415926535897943\cdots$$

più grande di π di circa il 10^{-15}.
Vediamo come descrive la costruzione il matematico indiano:

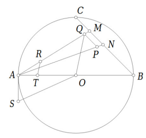


[2] Dal Carnevale della Matematica 95

Sia AB il diametro di un cerchio di centro O. Bisecare AO in M e trisecare OB in T. Tracciare da T un segmento perpendicolare ad AB che interseca la circonferenza in P. Disegnare una corda BQ uguale a PT e tracciare il segmento AQ. Disegnare da O e da T due segmenti paralleli a BQ che intersecano AQ rispettivamente in S ed R. Disegnare una corda AD uguale ad AS e un segmento tangente alla circonferenza $AC = RS$. Tracciare i segmenti BC, BD e CD; determinare su BD il punto E tale che $BE = BM$ e disegnare in E un segmento parallelo a CD che incontra BC in X.
A questo punto il quadrato di BX è quasi uguale all'area del cerchio, con un errore minore di un decimo di pollice quando il diametro del cerchio è di 40 miglia.
La seconda approssimazione

$$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4}$$

è invece legata a questa seconda costruzione geometrica:



Sia AB il diametro di una circonferenza di centro O. Bisecare la semicirconferenza superiore in C e trisecare AO in T. Tracciare il segmento BC e segnare i segmenti CM e MN uguali ad AT. Tracciare i segmenti AM e AN e trovare P lungo quest'ultimo segmento in modo tale che $AP = AM$. Da P tracciare la parallela a MN che interseca AM in Q. Tracciare OQ e da T il segmento parallelo a OQ che interseca AQ in R. Tracciare il segmento AS perpendicolare ad AO e uguale ad AR, quindi tracciare il segmento OS.
A questo punto il medio proporzionale tra OS e OB sarà molto vicino a essere uguale a un sesto della circonferenza, con un errore inferiore a un dodicesimo di polliche quando il diametro è 8000 miglia.

5. Pi e gli altri

5.1 Pi e i frattali

Scrive **Aaron Klebanoff**:

> L'insieme di Mandelbrot è probabilmente uno dei più begli insiemi in matematica. Nel 1991 **Dave Boll** scoprì la sorprendente occorrenza del numero π mentre esplorava una proprietà dell'insieme di Mandelbrot apparentemente non collegata. La scoperta di Boll è semplice da descrive re e comprendere ma non è ancora nota, probabilmente a causa del fotto che il risultato non è stato rigorosamente dimostrato.

Boll è uno studente di informatica presso la *Colorado State University* e si interessa di frattali. E proprio giocando con i frattali si imbatte nella sua curiosa scoperta. Il giovane, infatti, cerca di capire se l'*insieme di Mandelbrot* si restringe in maniera infinita e così, dato un numero piccolo ε a piacere, calcola il prodotto tra $\sqrt{\varepsilon}$ e il numero di iterazioni $N(\varepsilon)$ necessarie per l'orbita nulla. E questo prodotto, per ε sempre più piccolo, coincide con π!

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sqrt{\varepsilon} N(\varepsilon) = \pi \tag{5.1}$$

Klebanoff, a questo punto, prova a dimostrare rigorosamente la scoperta di Boll, che è stata diffusa attraverso il sito internet di quest'ultimo:

> Piuttosto che tentate di completare la dimostrazione del percorso verticale Boll, facciamo qualcosa di molto più semplice. Congetturiamo che ci siano infiniti percorsi di questo genere per ognuna delle infinite punte di M.

In questo modo Klebanoff dimostra la congettura di Boll, mettendola anche alla prova utilizzando il calcolo numerico.[1]

[1] Dal Carnevale della Matematica 59

5.2 Pi e il Tau

Il π è sicuramente il numero più famoso della matematica. Lo rappresenta e in un certo senso ne è l'essenza, per molti motivi: innanzitutto per la sua natura trascendentale e poi perché è possibile calcolarlo con vari metodi e applicando differenti approssimazioni. Esistono, però, delle persone in giro per il mondo affette dal così detto *tauismo*, ovvero da una passione sfrenata per τ, che è definito come il doppio di τ.
Per avere un'idea di cosa sia questo movimento filosofico-matematico, vi consiglio la lettura di *π is wrong!* di **Robert Palais** e *May conversion to tauism* di **Stephen Abbott**.
Ovviamente i *tauisti* festeggiano il *Tau Day*.
Restando nell'ambito delle curiosità, che probabilmente già conoscerete, nel 1897 lo stato dell'Indiana provò a fissare per legge il valore di π: chissà le multe ai trasgressori che avrebbero provato a migliorare il calcolo del suo valore![2]

5.3 Pi e i numeri primi

Una delle sfide matematiche più impegnative dell'ultimo secolo e mezzo, non ancora risolta, è la distribuzione dei numeri primi, che coinvolge la famosa *zeta di Riemann*, che come abbiamo visto può essere utilizzata per calcolare il π.
Una possibile conseguenza di ciò è, quindi, immaginare che le cifre che costituiscono π non sono distribuite in maniera casuale, ma potrebbero così presentare una certa regolarità. **Caldwell** e **Dubner** si muovono proprio in quella direzione quando, esaminando tutte le prime 10 cifre di π, vanno a determinare quanti numeri primi si trovano all'interno di queste cifre, determinando alla fine un totale di 14 numeri primi, la maggior parte dei quali da una cifra.
Come vedete nella tabella, i numeri primi da una cifra possono tranquillamente ripetersi (3 e 5 si ripetono due volte, per esempio), mentre i primi con più di una cifra vengono costruiti utilizzando solo cifre che all'interno dello sviluppo di π sono una accanto all'altra.

	π
Number of digits	1000
Number of 1-digit primes	398
Number of 2-digit primes	225
Number of 3-digit primes	136
Number of 4-digit primes	104
Number of 5-digit primes	87
Total primes 2-digit or greater	2345
Smallest missing primes	103 107 131 149 157
Largest prime (starting digit)	932-digits (46)

A quel punto non ci si può accontentare e il passo successivo è calcolare la probabilità di trovare un numero primo di date cifre all'interno di una sequenza di cifre di π estratta casualmente:

TABLE 3. k-Digit Prime Probabilities

	k-Digit Primes	Exact Probability	Approximate Probability $1/\log(10^k/2)$
1	4	.4	.62
2	21	.2333	.2556
3	143	.1589	.1609
4	1061	.1179	.1174
5	8364	.0929	.0924
6	68906	.0766	.0762

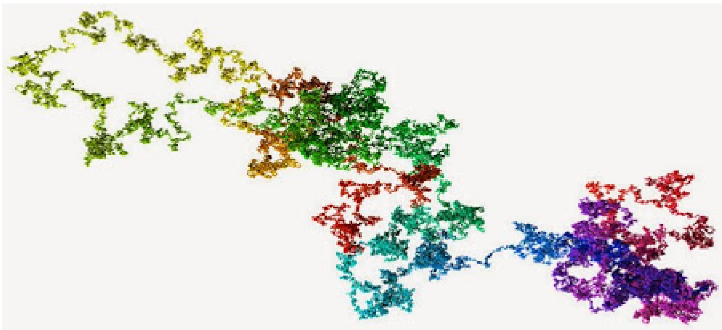
E' uno di quei problemi per cui i matematici non trovano una utilità pratica, ma che su tempi

[2]Dal Carnevale della Matematica 59

lunghi permette di costruire tecniche di calcolo, analitico e numerico, che permettono di risolvere problemi che potrebbero avere una certa utilità anche in altre discipline.[3]

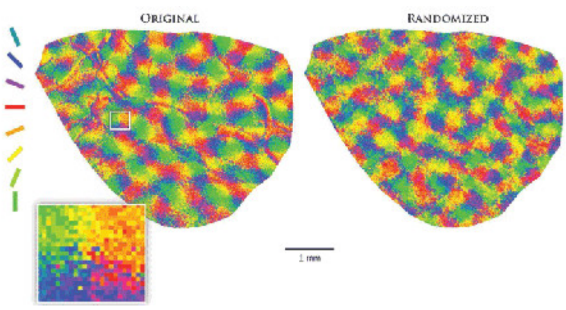
5.4 Pi e i cammini casuali

Le cifre che costituiscono il pi greco sono infinite e a tutt'oggi se ne conoscono circa 5 trilioni. Così come calcolarle è impresa di per sé abbastanza ardua, anche mostrarle tutte non è semplice, anche se è certo molto più semplice che vederle tutte. A meno che non ci si accontenti di una visualizzazione al tempo stesso semplice e spettacolare, che se da un lato fa perdere il dettaglio delle cifre, dall'altro mostra il livello di casualità nella distribuzione delle stesse.
L'idea della visualizzazione delle cifre delle costanti matematiche irrazionali e trascendentali nasce proprio a margine della ricerca sulla normalità di tali numeri, dove un numero reale a è detto normale nella base b se ogni stringa di m cifre compare nel numero con una frequenza pari a $1/b_m$. Conseguenza di questa ricerca, che è anch'essa figlia della domanda se le cifre di π sono distribuite casualmente o meno, condotta da **Bailey** e dai **fratelli Borwein** (gli stessi della *formula BBP*) è la rappresentazione grafica delle cifre del pi greco che fa ampio utilizzo dei cammini casuali[4]:



5.5 Pi e i neuroni

Uno degli aspetti più stupefacenti della matematica è la pervasività dei numeri trascendentali nella realtà, che sembra confermare l'idea di **Cantor** che la matematica e i numeri abbiano una loro realtà su cui si basa quella del nostro mondo. Per esempio il numero *phi* è presente in molte strutture naturali grazie alla spirale di **Fibonacci**. Anche il pi greco è presente, e non solo nella forma del cerchio. Nel 2010, infatti, un gruppo di neuroscienziati hanno scoperto che tre specie differenti di mammiferi (il galago, il toporagno, il furetto) condividono una organizzazione simile dei neuroni della corteccia visiva che presenta una densità molto vicina al valore del pi greco!



[3] Dal Carnevale della Matematica 71
[4] Dal Carnevale della Matematica 71

Il capo del gruppo di ricerca, **Fred Wolf**, si è interessato per anni dell'argomento, provando a sviluppare una teoria riguardo lo sviluppo della mappa cerebrale basata su metodi matematici utilizzati nella fisica per lo studio della formazione delle strutture. L'idea di base è quella di utilizzare due variabili (preferenza di orientamento e selettività) e quindi svilupparle introducendo nel gioco delle interazioni mutuali. A questo si aggiunge l'assunzione che queste interazioni rispettano una simmetria di base (ad esempio siti vicini dovrebbero avere una forma simile) e l'assunzione dell'esistenza di interazioni a lungo raggio. Dallo studio matematico e numerico emerge che le mappe generate presentano una densità molto vicina a quella del pi greco, risultato che nel 2010 si è rivelato per la prima volta corretto esaminando le mappe dei tre mammiferi di cui sopra.
Quindi esistono sul pianeta dei mammiferi che "vedono" il pi greco, e forse ha ragione chi pensa che in realtà la Terra è un immenso calcolatore i cui abitanti sono i *chip* che stanno perfezionando il calcolo per trovare la domanda fondamentale la cui risposta è... 42![5]

5.6 Pi e il numero aureo

Come ricorda la voce narrante a Paperino ne *Il paese della matematgica*, il simbolo dei pitagorici è il pentagono, figura regolare costituita da cinque lati uguali. Esso può essere costruito all'interno di un cerchio utilizzando semplicemente riga e compasso. Ora, ciascuno dei cinque triangoli in cui si può suddividere il pentagono, con base un lato e vertice opposto il centro del poligono, hanno come angolo al vertice il valore, in radianti, di $\pi/5$. E questo angolo è legato al rapporto aureo, φ, dalla relazione

$$2\cos\frac{\pi}{5} = \varphi \tag{5.2}$$

Un'altra relazione che lega i due numeri è anche quella scoperta da **Robert Everest**[6]

$$\varphi = 1 - 2\cos\frac{3\pi}{5} \tag{5.3}$$

5.7 Pi e la didattica

Il metodo di esaustione utilizzato da **Archimede** per ottenere una delle più precise approssimazioni di π dell'antichità, per quanto ormai abbandonato nella ricerca delle sue cifre, può essere utile per realizzare delle unità didattiche che permettano di vedere le applicazioni della matematica alla vita di tutti i giorni.
Un buon approccio è quello di combinare l'attività pratica con l'approfondimento storico, spingendo gli studenti stessi a trovare informazioni più dettagliate su Archimede e il suo metodo.
Il passo successivo è quello di applicare il metodo, misurando realmente e con il righello i poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza. Ognuna di queste figure viene fatta disegnare dagli stessi studenti. Partendo dalla figura di partenza dell'esagono, si va successivamente a raddoppiare il numero di lati per due volte, ottenendo in totale tre misure per il π.
L'attività[7], proposta da **Alessandra King** ai suoi studenti (presumibilmente tra il 2012 e il 2013), presenta almeno tre vantaggi: mostrare la necessità di essere quanto più precisi nella realizzazione

[5] Dal Carnevale della Matematica 83
[6] Dal Carnevale della Matematica 83
[7] Alessandra King (2013). Finding Pi with Archimedes's Exhaustion Method. *Mathematics Teaching in the Middle School* vol. 19, no. 2, pp. 116-123

dei disegni; far sperimentare con mano il concetto dell'errore di misura sperimentale; permettere di approcciarsi in maniera pratica al concetto astratto di limite.[8]

5.8 Piplex

Qual'è il risultato dell'operazione $4^{\pi} = \pi^{\pi^{\pi^{\pi}}}$? In effetti la versione originale del quesito si chiede se il risultato di tale operazione è un intero, ma ai fini della risposta non cambia nulla.
Iniziamo dalla banale osservazione che tale operazione è ancora inaccessibile per qualunque computer, sia per via del fatto che non si possono conoscere tutte le cifre di π (ma ciò non ha mai fermato i matematici dei numeri!), sia perché è comunque un'operazione piuttosto lunga da realizzare, almeno con tutti gli esponenziali presenti. Si può, però, provare a ottenere un'idea dell'ordine di grandezza del risultato.
Partiamo, dunque, dall'equazione

$$x = \pi^{\pi^{\pi^{\pi}}} \tag{5.4}$$

Se proviamo a valutarla utilizzando *wolframalpha* otteniamo

$$10^{10^{17.82364533941695}}$$

che possiamo provare a rendere un po' più comprensibile nella sua immensità se applichiamo il logaritmo in base dieci

$$\lg x = \pi \lg \pi^{\pi^{\pi}}$$

In questo caso l'esponente all'interno del logaritmo a destra dell'uguale da, sempre con *wolframalpha*, come risultato

$$1.34 \cdot 10^{18}$$

e questo sarà, all'incirca, l'esponente del primo π della fila.[9]

5.9 Pi e l'astronomia

Una delle caratteristiche principali del π è la sua invasività nella natura. Sarà perché è definito come il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro, e dunque conseguenza delle simmetrie sferiche, sarà per il suo fascino intrinseco, legato forse all'infinità delle sue cifre decimali, fatto sta che lo troviamo anche nel cielo, dove perde la proprietà di numero ma acquista quella di... nome stellare! Esistono infatti nel firmamento alcune stelle che vengono identificate con π: ad esempio le sei stelle che costituiscono lo scudo di Orione o la stella doppia Pi Bootis che si trova poco sotto Arturo.

[8] Dal Carnevale della Matematica 107
[9] Dal Carnevale della Matematica 107

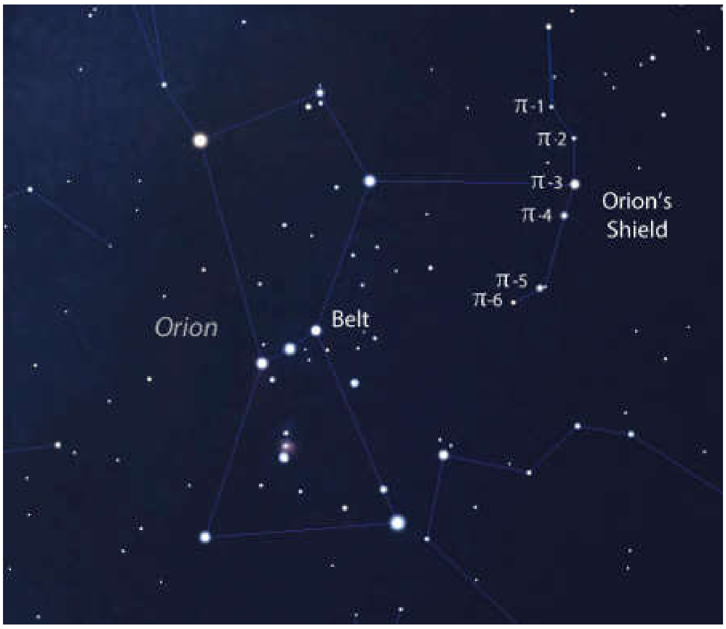


Figure 5.1: La costellazione di Orione con il suo π-scudo realizzata con Stellarium

Si trova anche in una delle equazioni cosmologiche più importanti in assoluto, l'equazione della relatività generale di Einstein:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \tag{5.5}$$

Si trova sul lato destro, insieme con la costante di gravitazione universale, nel termine che identifica l'energia della materia contenuta nell'universo. Il termine a sinistra, invece, è legato alla curvatura dello spaziotempo, ovvero alla sua geometria, il che rende forse un po' strana la presenza del π sul lato destro di questa equazione.
Si sa, però, che la matematica è ricca di misteri misteriosi, e la parte divertente è proprio svelarli![10]

5.10 Pi e l'Uomo Vitruviano

Una delle illustrazioni più note di **Leonardo Da Vinci** è *L'uomo vitruviano*, che vede un uomo incastonato all'interno di un quadrato e di una circonferenza intersecantesi tra loro. L'illustrazione di Leonardo è ispirata a un passaggio dal *De architectura* di **Vitruvio** dove vengono descritte le *divine proporzioni* di un essere umano. Vediamo di capire se, dal punto di vista matematico, l'illustrazione di Leonardo e, per traslato, l'uomo descritto da Vitruvio ha qualcosa di divino o perfetto.
Se prendiamo un cerchio di raggio 1, allora il quadrato dell'uomo vitruviano *leonardesco* ha lato pari a 1.656, mentre il quadrato corrispondende quadrato aureo ha lato 1.61*8. Se invece vogliamo che il perimetro del quadrato sia uguale alla circonferenza del cerchio, allora il lato del quadrato risulta pari a 1.571; se infine vogliamo che le aree delle due figure geometriche siano congruenti, allora il quadrato deve avere lato 1.772. Da questo breve esame vediamo che *L'uomo vitruviano*, per quanto sembri connesso al famoso problema della quadratura del cerchio, non riesca nell'intento, oltre a risultare una stima per eccesso del quadrato divino, se mi passate il termine.
Eppure, secondo qualcuno, Leonardo è andato vicino alla quadratura del cerchio per approssimazione.

[10] Dal Carnevale della Matematica 107

Intorno all'uomo vitruviano, infatti, si possono realizzare tutta una serie di costruzioni geometriche, o basate sulla descrizione di Vitruvio o per ricostruire il cerchio e il quadrato di Leonardo. In particolare tale **Hubert Weller** ha identificato una costruzione geometrica, basata sull'uomo vitruviano, che portata avanti per iterazione permette di quadrare il cerchio!